Interpretazione della moltiplicazione come un' addizione iterata.

Carlo Marchini
Dipartimento di Matematica – Università di Parma

Le misconcezioni connesse con la moltiplicazione hanno un'ampia letteratura (Fischbein, Vergnaud, ecc.).

Qui cerco di indicare alcuni aspetti che sembrano interessanti, connessi con l'introduzione della moltiplicazione, specialmente quando si riduce quest'operazione all'addizione.

In molti manuali il prodotto viene ottenuto come somma iterata di uno stesso addendo. Anche se questa affermazione può essere ritenuta corretta, osservo che vogliamo introdurre la moltiplicazione, non il prodotto.

È molto più difficile introdurre la moltiplicazione come addizione iterata, parlando solo dell'operazione e non degli addendi. [1].

Cerco di offrire una giustificazione teorica delle misconcezioni possibilmente indotte da questo approccio alla moltiplicazione.

- Una prima osservazione. Quando si riduce 3×4 a $4 + 4 + 4$, si ha bisogno delle proprietà formali dell'addizione, in questo caso della proprietà associativa, con tutti i problemi connessi con questa proprietà.
- In secondo luogo, non c'è accordo se sia $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ oppure se sia $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$. Per poter considerare uguali le due diverse interpretazioni del prodotto 3×4 (un esempio della proprietà commutativa della moltiplicazione) non si può invocare la proprietà commutativa dell'addizione.
- Inoltre la somma iterata non può spiegare (con la prima interpretazione del prodotto data sopra) cosa siano 1×4 e 0×4.

Questi problemi possono sparire se si assumono, per assioma, i risultati della moltiplicazione per 1 e per 0, la proprietà commutativa della moltiplicazione, contemporaneamente alla moltiplicazione stessa. In questo modo, però c'è bisogno di considerare la moltiplicazione in sé, come un concetto indipendente, quindi un qualsivoglia numero di esempi di prodotti non è sufficiente per definire la moltiplicazione come un tutto a sé stante.

Da un altro punto di vista, nell'espressione $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ (o $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3$, ma in questo caso non ha importanza quale interpretazione si dia), i due membri dell'uguaglianza hanno

[1] Questo compito è realizzato dalla teoria delle funzioni ricorsive, ma questo approccio teorico non è da ritenersi appropriato alla scuola primaria.

un'esplicita grande differenza: nel primo, ci sono due numeri, nel secondo ce n'è uno solo (il moltiplicando). Ora il problema è: dove è sparito il moltiplicatore? Una risposta ovvia è che nella prima uguaglianza 4 è addizionato (con se stesso) tre volte. Questa risposta merita la nostra attenzione: 3 è presente come numero (esplicito) nel primo membro dell'uguaglianza, e come aggettivo numerale (implicito) nel secondo membro dell'uguaglianza. Pertanto nell'uguaglianza $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$ si stanno mescolando due linguaggi diversi: nel membro a sinistra si tratta del linguaggio dell'aritmetica, a destre del meta-linguaggio usato per parlare dell'aritmetica.

La riduzione della moltiplicazione all'addizione dà preminenza ai modelli additivi, tra i modelli che coinvolgono i campi concettuali (secondo Vergnaud). Possiamo costatare questo con i cosiddetti problemi relativi a "l'age du capitaine": quando gli alunni non sanno quale operazione è necessaria nella risoluzione di un problema, essi applicano più spesso l'addizione.

Inoltre, con la riduzione della moltiplicazione all'addizione, la distinzione tra addizione e moltiplicazione rischia di sparire. Mi è capitato di osservare personalmente studenti sicuri che la soluzione dell'equazione $2x = 20$ fosse $x = 18$. Questo tipo di errore appare sistematicamente e più frequentemente del caso in cui la soluzione proposta per l'equazione $2 + x = 20$ sia $x = 1$. Nel primo caso ci possono essere fattori che possono influire sulla risposta sbagliata, quale l'assenza esplicita del simbolo per la moltiplicazione e il fatto che il numero intero relativo +2 sia scritto semplicemente come 2.

Un altro effetto della definizione del prodotto come somma iterata è che il meta-linguaggio coinvolto non può essere esteso ai casi di moltiplicazioni in cui il moltiplicatore non è un numero naturale: $(-3) \times 4$. Questo tipo di introduzione del prodotto dà luogo ad una misconcezione (evitabile? Inevitabile?) (Fischbein).

La giustificazione del modello della somma iterata è spesso basato sugli schieramenti, che, a loro volta, sono connessi con il prodotto cartesiano di insiemi.

La presentazione dei numeri naturali mediante la teoria degli insiemi come cardinalità (finite) di insiemi, permette di considerare la moltiplicazione come l'interpretazione aritmetica del prodotto cartesiano di insiemi. Tuttavia è bene osservare che questo approccio presenta molti problemi:

- Il prodotto cartesiano di insiemi non è commutativo; per ottenere la commutatività si richiede una teoria delle biezioni ben sviluppata.
- Una definizione corretta di insieme finito è molto al di là delle competenze dei bambini di scuola primaria.
- Inoltre il prodotto cartesiano è un'operazione di teoria degli insiemi applicabile ad insiemi arbitrari (finiti o no), è quindi ben diversa dalla moltiplicazione dei numeri naturali, un

operazione che poi si vuole estendere ai numeri interi relativi, ai numeri razionali, ai numeri reali e complessi. Il modello della cardinalità si presenta come un ostacolo alle estensioni a queste strutture numeriche più ricche.

La moltiplicazione, dal punto di vista linguistico, non è commutativa: nell'addizione si parla di addendi e questo nome comune prelude alla proprietà commutativa dell'addizione. Nella moltiplicazione si parla di *moltiplicando* e *moltiplicatore*, due nomi diversi come due luci segnaletiche di pericolo che i due poersnaggi hanno ruoli differenti. Questo capita in Italiano, in Inglese (ed anche in altre lingue). La differenza dei nomi è presente in altre 'operazioni' [2]: nella sottrazione ci sono il *minuendo* e il *sottraendo* (si osservino le differenti etimologie dei due termini). Nella divisione, il *divisore* ed il *dividendo*. Per l'elevamento a potenza (si noti la mancanza di una parola sola per indicare tale operazione, a riprova che essa è apparsa ben dopo le altre, (XVI – XVII secolo) e che è meno 'naturale' delle altre), *base* ed *esponente*. In tutti questi casi di nomi diversi assegnati ai termini, con l'eccezione della moltiplicazione, le 'operazioni' non sono commutative.
Gli autori dei manuali scolastici odierni preferiscono dizioni più generiche come 'termini della moltiplicazione' invece di moltiplicando e moltiplicatore, forse a causa della non univoca interpretazione di 3×4 come $3 + 3 + 3 + 3$ e $4 + 4 + 4$. Questa scelta terminologica è preferita in vista della proprietà commutativa della moltiplicazione.
C'è una differenza tra l'Inglese e l'Italiano nel leggere $3 \times 4 = 12$: in base ai testi Inglesi che mi sono disponibili, si legge $3 \times 4 = 12$ come "three multiplied by four *is* twelve" (tre moltiplicato per quattro *è* dodici) (si osservi la terza persona singolare) oppure "three times four *make* twelve" (tre volte quattro *fanno* dodici) (si osservi la persona plurale). In Italiano è più frequente la persona singolare "fa", "dà", "è", "è uguale a". Nel primo modo di leggere in Inglese, il soggetto è il numero tre (il *moltiplicando*, essendo il secondo termine il *moltiplicatore*); Nella seconda lettura Inglese, il soggetto è "times", *volte*, e tre non è un numero, ma un aggettivo numerale (il *moltiplicatore*, essendo il secondo termine il *moltiplicando*), e questo spiega perché il verbo è coniugato al plurale. A conferma di ciò $1 \times 4 = 4$ può essere letto, "One time four makes four" (una volta quattro fa quattro) (ma "zero times four make zero", pertanto 0 è plurale!). Ma come è come si deve leggere $a \times b = c$: "a times b make c" oppure "a time b makes c"?
In Italiano, il soggetto sembra essere l'operazione: i bambini la chiamano "la per" (e l'addizione "la più"), sostantivizzando la preposizione (o l'avverbio) con un articolo definito, perciò il verbo è (più

[2] Le virgolette sono necessarie poiché nell'ambito dei numeri naturali la sottrazione e la divisione non sono definite per ogni coppia (ordinata) di numeri naturali.

spesso) coniugato al singolare. Nel 'dialetto' Italiano degli SMS il segno × è usato al posto di "per", come preposizione e nella parola composta: "×è" in luogo di "perché".

Per la ricerca di misconcezioni che coinvolgono la moltiplicazione, mi sembra utile presentare e commentare un episodio registrato dai Proffessori G. Cataldi, L. Manganello e S.A.Pappadà nelle loro classi (di scuola secondaria di primo grado) [3].L'argomento trattato è l'introduzione dei numeri interi realtivi e le operazioni tra essi. Il punto di partenza è stato la tradizione Italiana delle banche di indicare i debiti dei loro clienti con numeri rossi e il detto proverbiale di "essere al verde" per indicare la mancanza di denaro, in cui "verde" è usato al posto di "nulla". L'uso dei colori per scopi matematici risale al matematico indiano Brahamagupta (VII secolo).

In questo episodio, i ragazzi hanno scelto il blu per indicare i 'veri' numeri, o i 'crediti'. Per brevità riporto qui solo ciò che è accaduto in classe al momento di introdurre la moltiplicazione tra numeri interi relativi, dopo avere trattato l'addizione (e la sottrazione) tra due numeri colorati. Più avanti commenterò alcuni aspetti delle proposte avanzate dalla classe relativamente all'addizione di numeri interi relativi. L'introduzione delle operazioni si è svolta gradualmente con la proposta di situazioni problematiche. Gli insegnanti delle classi, in queste citazioni, parlano in prima persona come narratori.

> «1°passo
>
> Si guidano i ragazzi a prendere in esame due numeri blu e si chiede di immaginare una possibile risposta per il seguente calcolo
>
> $$3 \times 4 = \ldots$$
>
> Non hanno difficoltà a fornire come risposta "dodici blu" perché ormai è per loro acquisito che si tratta di operare con numeri naturali.
>
> 2°passo
>
> Posti di fronte a
>
> $$2 \times 3 = \ldots$$
>
> i ragazzi rispondono con facilità sfruttando l'idea che moltiplicare significa fare un'addizione ripetuta quindi propongono che
>
> $$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6\ ;$$
>
> non solo, suggeriscono anche che, per esempio,
>
> $$4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$
>
> Come fatto per l'addizione, sempre sollecitati ad usare una nomenclatura corretta, evidenziano e appuntano sul quadernone che:
>
> Il prodotto di due numeri blu è un numero blu.
> Il prodotto di due numeri uno rosso e uno blu è un numero rosso.

[3] Da Iacomella A., Letizia A: & Marchini C. 2006, *Il pensiero strutturale come strumento formativo nella scuola secondaria di 1° grado: aspetti educativi, contenutistici ed epistemologici*, Preprint n. 447 – Dipartimento di Matematica - Università of Parma, Luglio 2006. http://www.unipr.it/arpa/urdidmat/Posters

3°passo

Ora si fanno esercitare a lungo i ragazzi su quanto hanno "scoperto" fino ad allora e così tutto va bene… finché qualcuno fra i ragazzi non si rende conto che non si è esaminata l'ultima situazione possibile, per esempio un situazione del tipo

$$3 \times 2 = \ldots$$

Un coro propone "è uguale a sei rosso" e tutti decidono che è veramente plausibile, d'altra parte la somma di due numeri rossi non è un numero rosso?

Senza batter ciglio si accetta che il prodotto di due numeri rossi possa essere un numero rosso e si incomincia a fare un po' di conti usando questa regola; ad un certo punto si chiede ai ragazzi di fare i seguenti esercizi:

1) *calcola* $3 \times (7 + 5) = \ldots$, *calcola* $(3 \times 7) + (3 \times 5) = \ldots$ *e confronta i risultati*;
2) *calcola* $3 \times (7 + 5) = \ldots$, *calcola* $(3 \times 7) + (3 \times 5) = \ldots$ *e confronta i risultati*.

…cominciano a comparire i primi risultati… le attese sono rapportate a situazioni già vissute per l'addizione, …c'è sconcerto… si controllano i conti… c'è poco da fare… con la regola "del rosso per rosso uguale rosso", che pure è stata accettata all'unanimità, si ha

$$3 \times (7 + 5) = 3 \times 2 = 6$$
$$(3 \times 7) + (3 \times 5) = 21 + 15 = 36$$

e 6 non è uguale a 36!

I ragazzi con stupore devono prendere atto del fatto che la regola da loro scelta, che pure è "bella", li mette di fronte a questa situazione:

$$3 \times (7 + 5) = (3 \times 7) + (3 \times 5)$$
$$3 \times (7 + 5) \neq (3 \times 7) + (3 \times 5).$$

Ciò li fa imbattere in un'operazione che non sempre si comporta "bene" distribuendosi rispetto all'addizione (nel primo esercizio lo fa, nel secondo no): la regola pensata certamente non può produrre una moltiplicazione distributiva rispetto all'addizione (per esserlo dobbiamo essere sicuri che si comporta "sempre" bene e non solo quando "capita"!). Quindi l'idea del "rosso per rosso dà rosso" va abbandonata, visto che si è alla ricerca di una nuova moltiplicazione che ci "piace" distributiva rispetto all'addizione, così come lo era l'antica, tranquillizzante moltiplicazione con i *numeri naturali*.

Allora…

cosa si fa? Ci arrendiamo?

Si fa strada un'altra possibilità e qualcuno propone di stabilire che

$$3 \times 2 = 6$$

e di provare con la regola che "rosso per rosso dà blu"

A questo punto i ragazzi sono veramente curiosi di vedere se in questo modo la nuova moltiplicazione che stiamo cercando di costruire si comporta bene! Non resta che cominciare a fare un po' di esercizi per controllare. Per tutti gli esercizi fatti in classe le cose vanno bene ma ad un certo punto… viene fuori che ci sono situazioni in cui occorre moltiplicare per 0!

Anche se senza troppa baldanza, si stabilisce che un qualunque numero colorato moltiplicato per 0 dà 0, e si continuano le "prove di distributività".

Comunque, vista l'esperienza vissuta, meglio fare anche altre verifiche a casa… e potrebbe non bastare!

Ora però i ragazzi si trovano una situazione didattica già vissuta a proposito dell'associatività dell'addizione, situazione che quindi veicola facilmente l'accettazione, garante sempre il professore, del fatto che la nuova moltiplicazione, la cui costruzione è ora finita, è distributiva rispetto all'addizione.

Solo ora evidenziano e appuntano sul quadernone:

Il prodotto di due numeri rossi è un numero blu.
Il prodotto di un qualunque numero colorato per 0 è 0.»

Voglio mettere in evidenza il momento del passaggio *quantità* – *grandezza* – *quantità*, che può essere individuato dalla citazione precedente.

Come prima cosa, un'osservazione linguistica. Ciascun ente matematico può avere (almeno) due aspetti: uno quantitativo ed uno qualitativo (ad esempio per un insieme si può considerare la cardinalità oppure una proprietà che definisce l'insieme stesso). Può non essere facile entrare approfonditamente in questa distinzione di natura filosofica. Per esempio non è semplice distinguere tra un segmento, la lunghezza del segmento e la misura della lunghezza del segmento. La lunghezza è un aspetto qualitativo del segmento, cioè la classe di equivalenza di tutti i segmenti congruenti col segmento dato (rispetto ad un'opportuna nozione di congruenza che dipende dal gruppo di trasformazione, secondo l'approccio alla geometria di Felix Klein). In questo significa la lunghezza di un segmento prescinde dalla misura. Per misurare occorrono i numeri. Pertanto possiamo associare al segmento una *quantità*, la misura della lunghezza ed una *grandezza*, la sua lunghezza. La *quantità* esprime l'aspetto quantitativo del segmento; la *grandezza* il suo aspetto qualitativo.

Questa specificazione linguistica è necessaria perché talora, anche sui dizionari e nel linguaggio comune, grandezza e quantità vengono usate come sinonimi. Ciò avviene in alcune lingue straniere, ad esempio in Inglese.

Questa dicotomia ha origini nella teoria di Aristotele (ed anche di Kant).

I matematici-filosofi dell'antica Grecia (Pitagora, Ippaso, Archita, Anassagora, Zenone) hanno scoperto o posto particolare attenzione ad aspetti problematici concernenti la continuità, i numeri reali, l'infinito, per esempio l'esistenza di segmenti incommensurabili (coi numeri razionali) e in questo modo essi (ed altri, ad esempio Aristotele e Eudosso) hanno portato avanti un lungo processo culturale conclusosi con:

- La sostituzione del concetto primitivo di infinito in atto (degli atomisti) con il concetto di infinito potenziale.
- La riduzione degli enti matematici ad aspetti preminentemente qualitativi, la categoria della *grandezza* piuttosto che riferirsi alla categoria della *quantità*.

Il testo degli *Elementi*, di Euclide, è ispirato da questo approccio epistemologico. Esso è stato considerato per più di due millenni, come *il* supremo esemplare di testo matematico. Esso ha avuto una profonda influenza culturale su tutto il mondo Occidentale e Mediterraneo.

Nel quinto libre degli *Elementi*, Euclide presenta le grandezze (secondo Eudosso); esse vengono interpretate come enti la cui natura non viene specificata. Tra questi enti sono possibili la comparazione, l'addizione ed inoltre è possibile costruire il multiplo ed il sottomultiplo delle grandezze secondo un numero naturale.[4]

Nella sequenza didattica riportata sopra, il passaggio epistemologico *quantità-grandezza-quantità* è mediato dall'intuizione del debito (numero rosso) e dall'approccio strutturale alla matematica (Bourbaki).

Nel verbale dell'episodio, ci sono molte occasioni per individuare questo passaggio continuo.

Nell'introduzione dell'addizione tra i numeri colorati, i giovani trattano i numeri blu come quantità, i 'soliti' numeri, pertanto questi numeri vengono identificati con i numeri naturali e l'addizione per numeri blu è identificata con l'operazione avente lo stesso nome tra i numeri naturali.

Nel caso dell'addizione tra numeri rossi, i ragazzi propongono la stessa procedura attribuendo la natura di quantità ai numeri rossi, quando si tratta di applicare l'addizione (tra numeri rossi).

Gli allievi hanno qualche tentennamento nel caso di addizione tra numeri rossi e blu, e questo è un sintomo che il modello quantitativo, in questo caso, 'scricchiola'. La proposta dei ragazzi per risolvere il problema è quella di introdurre un 'peso' per i numeri (il valore assoluto). In questo modo il colore diviene un aspetto qualitativo, una *grandezza*, associata ad ogni numero colorato. Gli allievi hanno (implicitamente) la sensazione che l'addizione tra numeri con colori diversi è proprio una operazione nuova, poiché si deve tenere conto, contemporaneamente, degli aspetti qualitativi e quantitativi.

Dinamiche più complesse sono coinvolte nella moltiplicazione.

Nel *1° passo*, l'asserzione:

> « [Gli allievi] Non hanno difficoltà a fornire come risposta "dodici blu" perché ormai è per loro acquisito che si tratta di operare con numeri naturali »

indica che i ragazzi si tengono stretti al loro modello quantitativo per la moltiplicazione, forse perché è codificato con le cosiddette tavole pitagoriche [5], [6].

Procediamo passando al *2° passo*:

> « Posti di fronte a
>
> $$2 \times 3 = \ldots$$
>
> i ragazzi rispondono con facilità sfruttando l'idea che moltiplicare significa fare un'addizione ripetuta quindi propongono che
>
> $$2 \times 3 = 2 + 2 + 2 = 6\ ;$$

---

[4] Questa nozione di grandezza è stata ri-elaborata nel XIX secolo ed ha portato a quegli enti matematici, oggi ben noti, col nome di vettori e di spazi vettoriali su un campo (o pù generalmente di modulo su un anello).

[5] Marchini C., 1988, 'Sulle modalità di introduzione dei numeri naturali', *L'educazione Matematica*, Anno IX - Serie II - **3** - N. 2, 77 - 96.

Marchini C.,1991, 'Tabelline … che passione!', *La Matematica e la sua Didattica*, Anno 5, n. 1, 46-51.

[6] In prodotto di *grandezze* è 'scabroso' e talvolta non esiste. In altri casi il prodotto di due *grandezze* esiste ma non è omogeneo con i fattori del prodotto, per esempio il prodotto di due segmenti potrebbe essere un'estensione piana.

non solo, suggeriscono anche che, per esempio,

$$4\times 7 = 7+7+7+7 = 28.»$$

Gli allievi osservano che

« i ragazzi rispondono con facilità sfruttando l'idea che moltiplicare significa fare un'addizione ripetuta»

frase che può essere interpretata come la ricomparsa del modello quantitativo associato ai numeri blu. Nel primo prodotto 3 è il moltiplicatore, nel secondo questo ruolo è preso da 4, anche se questi fattori occupano posizioni differenti nella scrittura. Il ruolo di moltiplicatore, quindi, non è determinato dalla posizione dei fattori, ma dalla 'natura' dei fattori stessi. In questi esempi i numeri rossi sono considerati come *grandezze*, i blu come *quantità*! In questo caso si ripete quanto avviene negli spazi vettoriali in cui si considera il prodotto di un vettore per una quantità scalare, con la 'stranezza' che gli 'spazi vettoriali' dei ragazzi sono, di volta in volta, spazi vettoriali sinistri e destri (in spregio della legge commutativa del prodotto). Con l'affermazione che il prodotto di un numero rosso ed uno blu è un numero rosso, i ragazzi ottengono un risultato (*grandezza*) omogeneo con la *grandezza* (fattore rosso) secondo la *quantità* (fattore blu).

Il *3° passo* testimonia un altro cambiamento di opinione: sulla base di un'analogia con la addizione, il primo tentativo di definizione del prodotto di due numeri rossi, dà un numero rosso, coerentemente con l'interpretazione dei numeri rossi come *quantità*. È interessante che l'insegnante riferisca qui:

« Un coro propone »

in cui l'articolo indeterminativo rivela che non tutti i ragazzi sono convinti del fatto. Solo una parte di essi propone di estendere le proprietà dell'addizione alla moltiplicazione. A parere mio, l'episodio mostra un esempio di ostacolo epistemologico, secondo Bachelard, [7], poiché si apprende sempre contro una conoscenza precedente, distruggendo ciò che non è più adeguato.

Il Principio di conservazione delle proprietà formali di Herman Hankel (1867) è usato come un banco di prova per la congettura dei ragazzi: saggiano infatti la congettura con la legge distributiva del prodotto rispetto alla somma. Non c'è una giustificazione logica per questa scelta: al momento, i giovani stanno proponendo una nuova operazione e le sue proprietà sono completamente ignote. Il nome di moltiplicazione e il segno usato per essa sono meri accidenti, ma proprio questi accidenti si trasformano nella sostanza dell'operazione. A parere mio il *Principio* di Hankel è un copione metafisico assunto tacitamente dall'insegnate quando presenta il problema (*rilancio*):

«1) *calcolate* $3\times(7+5)$ =…, *calcolate* $(3\times 7) + (3\times 5)$= ... *e confrontate i risultati*;
2) *calcolate* $3\times(7+5)$ =…, *calcolate* $(3\times 7) + (3\times 5)$=… *e confrontate i risultati*.»

[7] Bachelard G., 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, P.U.F, Paris.

Anche se i nomi ed i segni usati per le nuove operazioni ‘costringono’ i ragazzi ad assumere il mantenimento delle proprietà delle operazioni sui numeri naturali, non ci sono ragioni per fare ciò. Il test strutturale sulla distributività, tuttavia, con la sua evidenza, è un ausilio a superare l’*ostacolo epistemologico*:

> « Quindi l’idea del “rosso per rosso dà rosso” va abbandonata, visto che si è alla ricerca di una nuova moltiplicazione che ci “piace” distributiva rispetto all’addizione, così come lo era l’antica, tranquillizzante moltiplicazione con i *numeri naturali*. »

In questo modo il modello della *grandezza* per i numeri rossi viene abbandonato una volta di più e l’insieme dei numeri colorati, blu, rossi e verde viene considerato come un insieme di *quantità*, un nuovo, strano, *numero-quantità*.

Solo a questo stadio è possibile considerare la moltiplicazione libera dalla addizione (iterata).

L’episodio mostra come sia difficile e delicato superare le misconcezioni connesse con l’interpretazione del prodotto come somma iterata. Nel caso qui riferito, il lungo tempo dedicato a questo aspetto, con l’uso continuo di situazioni problematiche, è stato recuperato in seguito, migliorando nettamente il successo della classe nelle attività seguenti e con una sostanziale riduzione di errori di calcolo.

Un’affrettata presentazione dei numeri interi relativi e delle loro operazioni, lascia inalterate le misconcezioni che si riaffacciano poi come difficoltà inaspettate.

Progetti di ricerca

<u>Tempi brevi</u>: introdurre nei primi anni di scuola primaria la moltiplicazione con l’aiuto dei pattern (modulo) e del conteggio (cfr. Marchini, C. & Morini, G.: 1990, ‘Moltiplicazione e divisione in prima elementare’, *Scuola Italiana Moderna*, **99**, n° 9, 15 Gennaio 1990, 62 – 63.) [8] assieme all’addizione iterata. Paragonare gli errori sugli stessi esercizi fatti dai bambini di un campione sperimentale e di uno di controllo.

<u>Tempi brevi</u>: Ripetere l’itinerario illustrato nell’episodio e valutare i risultati.

---

[8] In (Marchini & Morini, 1990) si mostra come introdurre la divisione indipendentemente dall’addizione. Un pattern (modulo) geometrico costruito con forme diverse è interpretato come un viaggio spaziale in cui i pianeti hanno caratteristiche diverse, distante mediante le forme geometriche. Il risultato della divisione è il confronto del viaggio tra quello dell’astronave 1, che può fermarsi in ogni tipo di pianeta, e quello dell’astronave 2, che è più veloce, ma può fermarsi solo su pianeti di un tipo specifico, che hanno opportune caratteristiche, evitando gli altri. Il numero dei salti dell’astronave 1 per raggiungere un certo pianeta è il dividendo. Il numero delle forme diverse del pattern (modulo) è il divisore; il numero dei salti che l’astronave 2 per raggiungere lo stesso pianeta in cui si è fermata l’astronave 1 è il quoziente. Ma se il pianeta in cui si è fermata l’astronave 1 non ha le caratteristiche opportune per essere raggiunto dall’astronave 2, l’equipaggio di questa deve abbandonare l’astronave e prendere una navetta partendo dal pianeta più vicino all’arrivo che può raggiungere. Il numero dei salti della navetta è il resto della divisione.
Un approccio simile può essere usato per la moltiplicazione ed il calcolo del Massimo Comune Divisore.