

Un buon problema: quali caratteristiche?

Daniela Medici & Maria Gabriella Rinaldi

14 dicembre 2004

Per capire cosa è un buon problema, analizziamo alcuni problemi:

- La collezione Di Leo 1
- La collezione Di Leo 2
- Divani
- Il puzzle
- Funghi
- Caccia al tre

Analizziamo i problemi proposti in relazione a:

- Ambito concettuale
- Strategie risolutive
- Difficoltà
- Errori prevedibili
- Interesse per gli allievi

LA COLLEZIONE DI LEO 1 (9° RMT, II, 2)

Leo ha tenuto tutte le candeline delle sue torte di compleanno dall'età di 1 anno fino a oggi. Ogni anno, sulla torta tutte le candeline erano nuove.

Oggi Leo ha 91 candeline.

Qual è la sua età?

Scrivete come avete trovato l'età di Leo.

Ambito concettuale:

Aritmetica: addizione di una serie di numeri

Analisi del compito:

- Addizionare successivamente tutti i numeri (di candeline) fino ad arrivare a 91 :
 $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, $15 + 6 = 21$, $21 + 7 = 28$, $28 + 8 = 36$,
 $36 + 9 = 45$, $45 + 10 = 55$, $55 + 11 = 66$, $66 + 12 = 78$, $78 + 13 = 91$.
- Oppure: Procedere con prove successive: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ "insufficiente", $21 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ "insufficiente", $55 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120$ "troppo grande",
 $55 + 11 + 12 + 13 = 91$. Quindi Leo ha 13 anni.
- Oppure: Disegnare tutte le torte con le candeline e poi contarle.

LA COLLEZIONE DI LEO 2 (9°RMT, II, 13)

Leo ha tenuto tutte le candeline delle sue torte di compleanno dall'età di 1 anno fino a oggi. Ogni

anno, sulla torta tutte le candeline erano nuove.

Una sola volta, per i suoi 15 anni, le candeline si sono consumate tutte.

Leo possiede attualmente 2001 candeline.

Qual è la sua età?

Scrivete come avete trovato l'età di Leo.

Ambito concettuale:

Aritmetica :successioni

Algebra : formula dei numeri triangolari

Analisi del compito:

Addizionare i numeri (di candeline), successivamente, salvo 15, per arrivare a 2001

Oppure cercare una legge di passaggio tra l'età e il numero di candeline:

1	2	3	4	5	6	7	8	n
1	3	6	10	15	21	28	36		$(n \times (n + 1))/2$

e cercare il numero n che ha 2016 ($2001 + 15$) per immagine, per prove successive

es.: 40 --> $(40 \times 41)/2 = 820$, ... 60 --> $(60 \times 61)/2 = 1830$, ... e infine: 63 --> $(63 \times 64)/2 = 2016$

dunque l'età di Leo è 63 anni.

DIVANI

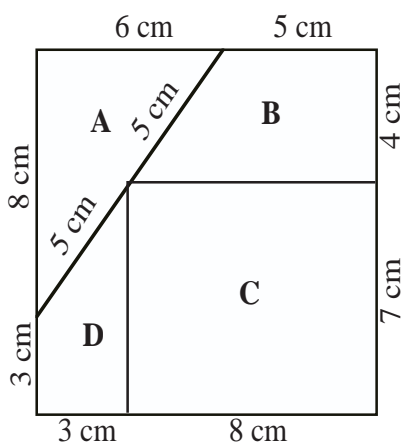
La fabbrica Divanix lancia sul mercato un nuovo modello di divano.

La spesa per la struttura di ogni pezzo è di 450 euro e la tappezzeria costa 240 euro.

Qual è la spesa per ogni divano?

Sapendo che in un mese hanno ricavato 190.500 euro e che il guadagno totale è stato di 80.100 euro, quanti divani sono stati venduti?

IL PUZZLE (tratto da un problema di Brousseau)



Il puzzle rappresentato in figura va ingrandito:

il segmento che misura 4 cm deve misurarne 6 sul puzzle ingrandito.

Ingrandite ciascuno dei quattro pezzi e costruite così il nuovo grande puzzle.

Ambito concettuale

Geometria: figure geometriche, similitudini

Aritmetica: proporzioni

Analisi del compito

Comprendere ed interpretare correttamente le informazioni.

Focalizzare l'attenzione sul pezzo B e stabilire le misure degli altri lati . Procedere dunque con gli altri pezzi. Disegnare il puzzle ingrandito indicando chiaramente le misure.

Oppure ritagliare e ingrandire ogni pezzo, per ricomporre poi il puzzle ottenuto.

Analisi delle difficoltà

Si tratta di superare la concezione “additiva”, riconoscendo un problema di proporzionalità.

La strategia del ritaglio permette un controllo immediato della soluzione.

FUNGHI (11° RMT, I, 3)

Andrea, Roberto, Daniele e Francesco hanno raccolto dei funghi nel bosco.

- Francesco ne ha trovati più di Daniele.
- Andrea ne ha meno di Daniele.
- Andrea e Roberto hanno insieme tanti funghi quanti quelli che hanno insieme Daniele e Francesco.

Chi ha trovato più funghi? Chi ne ha trovati di meno?

Spiegate le vostre risposte.

Ambito concettuale

Logica e ragionamento: deduzione, seriazione e compensazione.

Analisi del compito

Comprendere ed interpretare correttamente le tre informazioni.

Rappresentare o immaginare le due relazioni d'ordine: $F > D$; $A < D$ e combinarle per ottenere la successione dei tre bambini A, D e F: $A < D < F$.

Interpretare l'uguaglianza $A + R = D + F$ e metterla in relazione con la successione precedente attraverso una compensazione del tipo: poiché D ed F ne hanno ciascuno più di A, occorrerà che R ne abbia più di D e di F per compensare;

o lavorare a partire da esempi numerici con ipotesi del tipo: se A ne ha 3, D ne ha 5 e F ne ha 6, allora R deve averne 8 perché $5 + 6 = 11$ e $3 + 8 = 11$, ripetute parecchie volte per convincersi della successione $A < D < F < R$.

Esprimere la risposta: è Roberto che ha più funghi e Andrea che ne ha di meno.

Analisi delle difficoltà

E' richiesto di ordinare non tanto le persone, ma i numeri di funghi di ciascuno cioè **quantità non note**.

Una strategia risolutiva consiste proprio nell'ipotizzare tali quantità e procedere per ipotesi e verifica.

Oppure si può lavorare più in astratto sulla relazione d'ordine.

Entrambe le strategie presentano qualche difficoltà:

- la prima comporta la formulazione di ipotesi che soddisfino a tutte le condizioni e la gestione dei dati ottenuti
- la seconda non supportata da un adeguato simbolismo comporta una capacità di astrazione che va considerata in relazione all'età degli allievi

CACCIA AL TRE (10° RMT, I, 3)

Isidoro sta scrivendo la successione dei numeri a partire da 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Ad un certo punto Isidoro scrive la cifra 3 per la venticinquesima volta.

Quale numero sta scrivendo Isidoro a quel punto?

Mostrate come lo avete trovato.

Ambito concettuale

Numerazione: distinzione fra cifra e numero

Analisi del compito

Capire che si deve contare quante volte compare la cifra 3 nella successione dei numeri.

Organizzare la ricerca: scrivere la successione dei numeri oppure scrivere solo i numeri contenenti la cifra 3 oppure procedere esaminando successivamente le diverse decine.

Fermarsi al numero che contiene la venticinquesima cifra 3, e cioè a **131**.

CHE COSA INTENDIAMO PER “PROBLEMA” (L. Grugnetti)

Una situazione per la quale non si disponga di una soluzione immediata e che ci obbliga a inventare una strategia, a fare dei tentativi, a tornare sui propri passi, a verificare. Il testo **non** deve contenere “parole chiave”.

Una situazione è un problema **solo la prima volta** che la si affronta.

Quando se ne è trovata la soluzione, diventa parte delle conoscenze organizzate e riconoscibili in classi di “**problemi risolti**”.

Il “problema aperto”

Situazione che induce a mettersi in gioco per il **piacere di cercare e trovare**: sfide, giochi matematici, rompicapo.

L'interesse di tali attività sta nello stimolare lo spirito di **ricerca**, il procedimento scientifico e l'atteggiamento di fronte ad un ostacolo (motivazioni intrinseche).

La “situazione problema” o problema per costruire nuove conoscenze

Attività che l'allievo non riesce a risolvere con le conoscenze che ha.

Per cercare la soluzione l'allievo dovrà **elaborare un sapere nuovo**, che può essere in contraddizione con le conoscenze anteriori. (**vedi modello socio-costruttivista**)

Chiameremo “**problemi di applicazione**” o “**esercizi**” le attività di rinforzo e di assimilazione delle conoscenze studiate e del loro funzionamento in contesti differenti, ma già noti.

Si situano generalmente alla fine di un percorso didattico.

Per risolverli **si ricorre a strategie già incontrate e apprese**.

FASI DI RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA (F. Jaquet)

Fase di appropriazione: l'allievo riformula il problema nel suo linguaggio

La fase di appropriazione del problema va al di là della semplice lettura dell'enunciato e della trasmissione delle consegne.

La domanda proposta dall'insegnante deve essere riformulata dall'allievo, nel suo linguaggio, per diventare **il suo** problema.

E' in questo momento che si ridefiniscono i termini, si precisano le consegne, si sviluppano e si eliminano le resistenze, si regolano le questioni di organizzazione pratica.

Fase di ricerca: si elaborano nuovi modelli e strumenti

Dal momento in cui l'allievo si è appropriato del problema, può investire le sue conoscenze ed entrare in azione. E' il tempo della ricerca, delle prove, delle congetture e delle verifiche, del rifiuto dei modelli errati o insufficienti, della creazione di nuovi strumenti.

Per superare gli ostacoli che si presentano nel corso di questa fase, il lavoro di gruppo o i momenti di congetture collettive, stimolati dall'insegnante, possono favorire l'emergere dei modelli più efficaci.

Fase di formulazione e di validazione:

Allorché si è scoperta una soluzione del problema, occorre descriverla, esplicitando le conoscenze messe in opera o a cui si è fatto ricorso nel corso della ricerca.

In questa fase è possibile anche l'auto-validazione, che scaturisce dal comunicare la propria soluzione, giustificandola ed eventualmente difendendola.

CARATTERISTICHE DI UN BUON PROBLEMA (F.Jaquet)

L'allievo deve poter partire da solo L'allievo deve potersi impegnare nell'attività in maniera autonoma attraverso consegne o enunciati semplici.

La situazione deve essere **motivante** e permettergli di prevedere risposte possibili e di dare un senso al suo impegno

La situazione deve suscitare un comportamento di ricerca

La situazione deve essere abbastanza ricca da suscitare congetture e abbastanza "consistente", cioè non banale, affinché il primo tentativo non conduca immediatamente alla soluzione.

E' auspicabile che sia necessario un susseguirsi di prove, congetture, verifiche.

Qualità di un buon problema:

- essere autovalidante
- presentare diverse strategie risolutive
- attivare diversi registri
- essere utilizzabile per la costruzione di nuove conoscenze