

# Nuovi problemi per nuove conoscenze

Daniela Medici & Maria Gabriella Rinaldi

14 gennaio 2004

## Le “situazioni problema”

Le “situazioni problema” sono progettate e “messe in scena” per costruire nuove conoscenze. L'ingresso nella situazione richiede conoscenze acquisite, ma insufficienti per permettere la risoluzione del problema.

Il reinvestimento di tali conoscenze a volte non basta, benché sia utile: occorre sviluppare nuove acquisizioni.

E' l'allievo stesso che deve prendere coscienza della insufficienza o della inadeguatezza delle precedenti conoscenze, per costruirne delle nuove.

### **La situazione-problema deve far apparire le nuove conoscenze necessarie ed efficaci**

La conoscenza che si desidera far acquisire deve essere lo strumento più efficace o il più adatto alla risoluzione del problema.

In tal modo la nuova conoscenza trova il suo senso.

Consideriamo i seguenti problemi e il loro utilizzo per la costruzione di nuove conoscenze:

- **IL PUZZLE**
- **DOVE SI POSA LA MOSCA?**
- **I FRANCOBOLLI**
- **IL COLORE DEL MARE**
- **SALTANDO SALTANDO**
- **IL TERRENO DI FRANCESCO**
- **PALINDROMI**
- **IL CUBO FORATO**
- **IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO**

## PER LA COSTRUZIONE DEL PENSIERO PROPORZIONALE

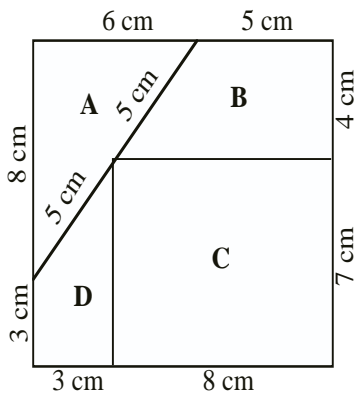
- **Il puzzle**
- **Dove si posa la mosca?**
- **Il colore del mare**
- **I francobolli**

**IL PUZZLE** (tratto da un problema di G. Brousseau)

Il puzzle rappresentato in figura va ingrandito:

il segmento che misura 4 cm deve misurarne 6 sul puzzle ingrandito.

Ingrandite ciascuno dei quattro pezzi e costruite così il nuovo grande puzzle.



OSSERVAZIONE:

“ingrandire”

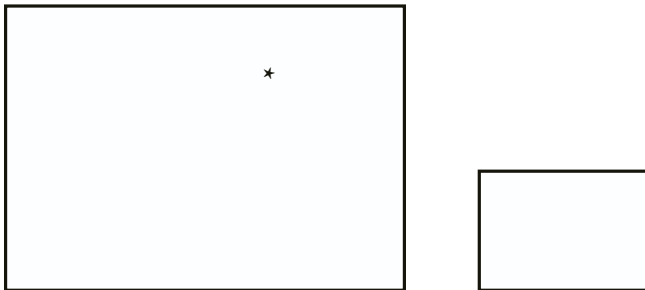
dal dizionario **Baruk**, Edizione italiana a cura di **Francesco Speranza** e **Lucia Grugnetti**, pag. 276, alla voce INGRANDIMENTO: s.m. XVII sec., da “grande”,

**a. I** (Italiano) Riproduzione di un oggetto in dimensioni maggiori **conservando i rapporti**. La parola è particolarmente usata in fotografia.

**b. M** (Matematica) La parola ingrandimento è entrata di recente, con rimpicciolimento o riduzione, nel vocabolario pedagogico-matematico.

Cfr. riduzione e ingrandimento (alle pagine 520-522).

**DOVE SI POSA LA MOSCA? (7° RMT, I, pr. 15)**



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.

Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.

Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

**Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.**

Spiegate come avete proceduto.

### Analisi a priori

**Ambito concettuale:** geometria: ingrandimento (omotetia),

aritmetica: proporzionalità poi le parallele corrispondenti sulla foto e individuare “la mosca” dalla loro intersezione; **oppure** cercare il centro di omotetia, intersecando due rette congiungenti punti corrispondenti e (funzione lineare)

**Analisi del testo:** assenza di parole chiave

**Analisi del compito:**

- procedure di tipo geometrico:  
tracciare due rette passanti ciascuna per la mosca e (ad es.) per un vertice del foglio e condurre le parallele corrispondenti utilizzando le proprietà dell’omotetia.
- procedure di tipo aritmetico:

determinare il fattore di riduzione della fotografia a partire dai due rettangoli (eventualmente verificando che è il medesimo per le due dimensioni):  $2,5 : 6 = 3,5 : 8,4 = 5 : 12$   
determinare poi le coordinate della mosca sul foglio e calcolare le coordinate corrispondenti sulla foto.

### IL COLORE DEL MARE

Un amico ci ha detto che per riprodurre un particolare colore del mare, dobbiamo mescolare tra loro quattro diversi colori e ci ha consigliato le rispettive quantità, che sono riportate nella tabella qui sotto.

Purtroppo abbiamo a disposizione una quantità diversa del primo colore.

Riesci a determinare le quantità degli altri colori, in modo che il colore finale non cambi?

Colore	Quantità Consigliata	Quantità effettiva
Verde scuro	70 ml	50 ml
Azzurro cielo	40 ml	
Giallo Chiaro	25 ml	
Bianco	20 ml	

Spiegazione: \_\_\_\_\_

### IL COLORE DEL MARE (scuola primaria)

Un amico ci ha detto che per riprodurre un particolare colore del mare, dobbiamo mescolare tra loro quattro diversi colori e ci ha consigliato le rispettive quantità, che sono riportate nella tabella qui sotto.

Purtroppo abbiamo a disposizione una quantità diversa del primo colore.

Riesci a determinare le quantità degli altri colori, in modo che il colore finale non cambi?

Colore	Quantità Consigliata	Quantità effettiva
Verde scuro	60 ml	20 ml
Azzurro cielo	90 ml	
Giallo Chiaro	36 ml	
Bianco	40 ml	

Spiegazione: \_\_\_\_\_

### Analisi a priori

**Ambito concettuale:** aritmetica, rapporti, proporzionalità

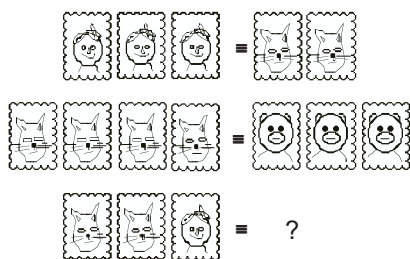
**Analisi del testo:**

- assenza di parole chiave,
- “purtroppo...”, “riesci”... possono suggerire la non-risolubilità
- “determina” o “riesci a determinare”?

**Analisi del compito:** (possibilità di agire sulla variabile didattica “rapporto di proporzionalità”:  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ )

- Possibilità di controllo delle soluzioni (validazione): si annulla la quantità di bianco se si applica la strategia errata che individua nella differenza tra le due quantità di verde la quantità da sottrarre ad ogni colore.

## FRANCOBOLLI ( 8° RMT, finale, pr. 4 )



Nel paese di Transalpino, ci sono solo tre tipi di francobolli raffiguranti delle bambole, dei gatti e degli orsi.

- 3 bambole valgono 2 gatti

- 4 gatti valgono 3 orsi

**Quanti orsi occorrono per sostituire due gatti e una bambola ?**

**Spiegate il vostro ragionamento**

### Analisi a priori

**Ambito concettuale:** logica, aritmetica

**Analisi del compito:**

- Comprendere che, a partire dalle relazioni di equivalenza date, se ne possono trovare delle altre per "proporzionalità elementare" (per esempio: se 3 bambole valgono 2 gatti, allora 6 bambole valgono 4 gatti, ....)
- Lavorare per "transitività" (per esempio, se 6 bambole valgono 4 gatti e 4 gatti valgono 3 orsi, allora 6 bambole valgono 3 orsi o 2 bambole valgono un orso)
- Lavorare per sostituzione (per esempio, sostituire 2 gatti con 3 bambole, ...)
- Combinare i tre tipi di trasformazioni precedenti: 2 gatti e una bambola fanno 4 bambole (3 + 1) e 4 bambole corrispondono a 2 orsi.

## PER LA COSTRUZIONE DEL CONCETTO DI MULTIPLO E DIVISORE

### SALTANDO, SALTANDO ( 10° RMT, finale, pr. 4 )



Una rana, un canguro e una lepre saltellano sulla «pista dei numeri»:

Partono tutti dalla casella **0**.

La rana fa sempre salti da tre caselle (quindi con il primo salto arriva sulla casella 3), il canguro fa sempre salti da sei caselle e la lepre fa sempre salti da quattro caselle.

Con l'ultimo salto ogni animale arriva sulla casella finale del percorso.

Ciascun animale lascia le proprie impronte sulla casella su cui poggia le zampe.

Terminato il gioco, ci sono 9 caselle contenenti ciascuna impronte di tutti e tre gli animali.

Indicate qual è il numero della casella finale della pista.  
Spiegate come siete arrivati alla vostra risposta.

Vedi analisi di **Roland Charnay** su:

[www.matematicainsieme.it](http://www.matematicainsieme.it) ® pacchetti formativi ® insegnamento-apprendimento con la risoluzione di problemi ® problemi o direttamente:

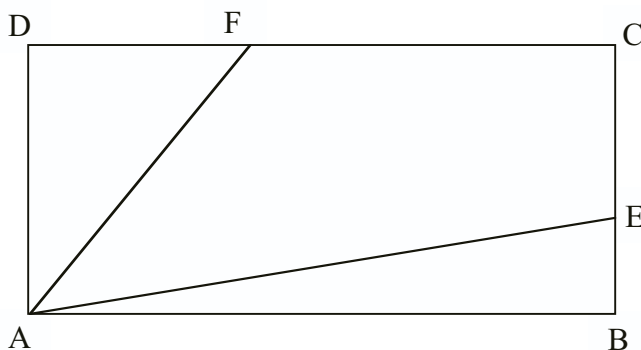
<http://www2.unipr.it/~urdidmat/Problemi/Parte%203/132Anapriori.pdf%20alias>

## PER L' INTRODUZIONE AL CALCOLO LETTERALE

- Il terreno di Francesco
- Palindromi

### IL TERRENO DI FRANCESCO ( 11° RMT, II, pr. 16 )

Francesco vuol dividere un terreno rettangolare fra i suoi tre figli, sistemando due palizzate che partono dal vertice A, in modo che le tre parti abbiano la stessa area.



Questo disegno rappresenta un primo tentativo, ma Francesco si accorge che non va bene.

**Dove dovrà sistemare gli estremi E ed F delle palizzate sui lati BC e CD in modo che la divisione sia giusta?**

**Indicate con precisione la posizione di questi punti e giustificate la vostra risposta.**

#### Analisi a priori

##### **Ambito concettuale**

Geometria: rettangolo, triangolo e loro misure, generalizzazione di un risultato

Algebra: attribuzione di variabili, calcolo letterale

##### **Analisi del compito**

Capire che le due palizzate (sul disegno due segmenti) vanno sistemate in modo che le tre parti che si formano abbiano la stessa area, che sarà dunque  $\frac{1}{3}$  dell'area del rettangolo.

Indicare con  $a$  e  $b$  le dimensioni del rettangolo (rispettivamente base e altezza o viceversa) e

calcolare l'area  $(ab)$  e calcolare l'area che deve avere ogni parte:  $(ab):3$ .- Capire che  $b$  è un cateto del triangolo ADF e  $a$  un cateto del triangolo ABE

Calcolare  $DF = \frac{2}{3}b$  e  $EB = \frac{2}{3}a$  e concludere che il punto E deve avere distanza  $\frac{2}{3}$  dal vertice B e il punto F distanza  $\frac{2}{3}$  dal vertice D.

Oppure calcolare le misure della figura assegnata con il righello (7,8 cm e 3,6 cm) e calcolarne l'area (28,08 cm<sup>2</sup>), Calcolare l'area di ogni parte (9,36), calcolare la misura di BE ( $18,72:7,8=2,4$ ) e la misura di DF ( $18,72:3,6=5,2$ ), sistemando poi i segmenti.

Oppure scegliere per il rettangolo delle misure "ad hoc" (per esempio dimensioni 15 e 6, fare un disegno su carta quadrettata e renderci conto che, poiché l'area sarà di 90 quadretti, l'area di ogni triangolo sarà di 30 quadretti. Sistemare allora il segmento AF in modo opportuno e così via

### **PALINDROMI** (7° RMT, II, pr. 16)

Nella famiglia ROTOR, il padre OTTO, la madre ANNA e i figli AMIMA e BOB leggono talvolta da destra a sinistra e talvolta da sinistra a destra. Dicono che secondo loro le cose funzionano e che è anche possibile effettuare moltiplicazioni leggendo da destra a sinistra senza cambiare il risultato. Per esempio, pensano che:

- 24 x 84 sia uguale a 48 x 42
- 62 x 39 sia uguale a 93 x 26, etc.

#### **E voi, che cosa ne pensate?**

Se pensate che funzioni sempre o se siete di parere contrario, spiegate perché e scrivete tutti i prodotti di due numeri di due cifre (aventi non più di una cifra uguale) che vanno bene per la famiglia ROTOR.

#### **Analisi a priori**

**Ambito concettuale:** aritmetica, combinatoria, calcolo letterale

#### **Analisi del compito:**

- verificare le affermazioni della famiglia:  
 $24 \times 84 = 48 \times 42 = 2016$ ,                       $93 \times 26 = 62 \times 39 = 2418$
- cercare di scoprire la legge a partire da questi due esempi o, in generale, per scomposizione dei numeri in decine e unità del tipo:  
 $(10a + b) \times (10c + d) = (10d + c) \times (10b + a)$   
 $100ac + 10(bc + ad) + bd = 100bd + 10(bc + ad) + ac$   
 $99ac = 99bd$  da cui  $ac = bd$
- stilare poi l'inventario delle coppie di numeri naturali differenti inferiori a 10 e strettamente positivi che verificano la relazione precedente:  $1 \times 4 = 2 \times 2$ ,  $1 \times 6 = 2 \times 3$ ,  $1 \times 8 = 2 \times 4$ ,  $1 \times 9 = 3 \times 3$ ,  $2 \times 6 = 3 \times 4$ ,  $2 \times 8 = 4 \times 4$ ,  $2 \times 9 = 3 \times 6$ ,  $3 \times 8 = 4 \times 6$ ,  $4 \times 9 = 6 \times 6$ . Ciò conduce ai 14 prodotti:  $12 \times 42$ ,  $12 \times 63$ ,  $13 \times 62$ ,  $12 \times 84$ ,  $14 \times 82$ ,  $13 \times 93$ ,  $23 \times 64$ ,  $24 \times 63$ ,  $24 \times 84$ ,  $23 \times 96$ ,  $26 \times 93$ ,  $34 \times 86$ ,  $36 \times 84$ ,  $46 \times 96$ .

### **PER L'EQUISCOMPONIBILITÀ** (Capacità di confrontare estensioni senza l'utilizzo di misure)

#### **IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO** (8° RMT, I, pr.6)

Questo è il giardino del signor Torquato:

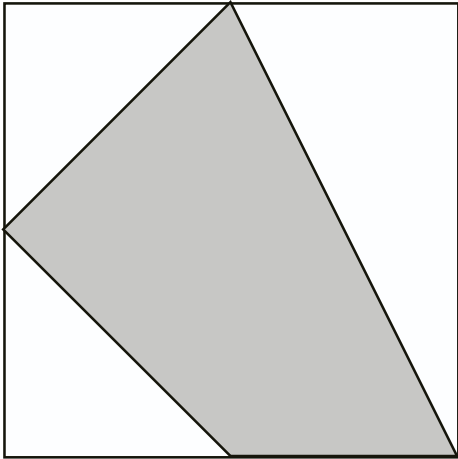
Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

«Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?»

#### **E voi che cosa ne pensate?**

**Spiegate la vostra risposta.**



Vedi analisi di **F. Jaquet** su:

**[www.matematicainsieme.it](http://www.matematicainsieme.it) ® pacchetti formativi ® insegnamento-apprendimento con la risoluzione di problemi ® problemi**

o direttamente:

<http://www2.unipr.it/~urdidmat/Problemi/Parte%203/probl321.htm>

### **PER LA COSTRUZIONE DELLA VISIONE SPAZIALE**

La trattazione della geometria nello spazio, introdotta abitualmente in terza media, è sempre più “compressa” nell’ultimo periodo dell’anno.

In tal modo c’è il rischio che si riduca all’applicazione di formule imparate a memoria, non interiorizzate e non sostenute da un’adeguata visione spaziale.

Riteniamo invece che una buona intuizione spaziale si possa e si debba cominciare a “costruire” già dalla scuola primaria.

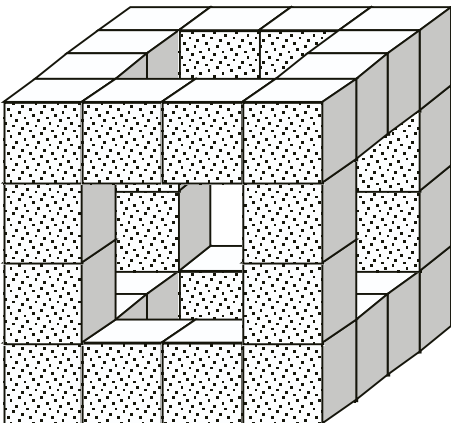
### **IL CUBO FORATO (8° RMT, I. pr. 10)**

Durante il fine settimana Rubik ha costruito un cubo forato come quello rappresentato in figura.

Fiero del suo lavoro lo mostra al suo amico Kubi e lo sfida a trovare quanti cubetti sono necessari per riempire completamente il cubo.

**Secondo voi quanti cubetti occorrono?**

**Giustificate la vostra risposta.**



## **Analisi a priori**

### ***Ambito concettuale***

- Geometria: visione spaziale e volume del cubo

### ***Analisi del compito***

- Procedere in modo sistematico al conteggio dei cubetti che occorrono (32); per esempio, contando i cubetti mancanti sulle 6 facce e aggiungendo a questi i cubetti interni che formano un cubo di lato 2, oppure sezionando il cubo in strati e contando i cubetti mancanti in ogni strato

### ***Valutazione***

- 4 Risposta corretta e ben argomentata
- 3 Risposta corretta senza giustificazione oppure ragionamento corretto con errore di calcolo
- 2 Errore dovuto al conteggio ripetuto dei cubetti interni
- 1 Inizio corretto di ragionamento
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 5 – 6

**Origine:** Siena –Incontro di Siena