

Apprendimento, insegnamento e problem solving: come migliorare l'atteggiamento della classe nei riguardi della Matematica¹.

Beatrice Bertazzoni & Carlo Marchini
Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica, Università di Parma – I

Abstract: Presentiamo una sperimentazione condotta in 7 classi quinte della scuola primaria (alunni di 10 anni) riguardante un'attività di problem solving. La sperimentazione ha coinvolto 99 alunni, con l'obiettivo di migliorare l'atteggiamento dei bambini verso la matematica e di migliorare i loro risultati nel problem solving. I mezzi usati nella sperimentazione sono stati i problemi non-standard del Rally Matematico Transalpino lavorando in classe secondo una metodologia di apprendimento cooperativo.

1. Introduzione – Lo scopo della ricerca. Il Problem Solving è uno dei principali argomenti nel programma di Matematica di quinta elementare (l'ultima classe della scuola primaria in Italia): durante l'esame finale in questo livello scolastico (in vigore fino al 2004) gli alunni erano tenuti a risolvere individualmente dei problemi. Questi problemi sono comuni a molte classi all'interno della scuola. Gli insegnanti della scuola primaria si sentono personalmente molto gratificati quando i loro alunni ottengono buone valutazioni nell'esame finale. Molti di essi, compreso il primo autore di questo articolo, osservano che la difficoltà nel problem solving può condizionare il comportamento degli alunni ed è causa della loro avversione nei confronti della Matematica.

Lo scopo di questa ricerca è mostrare che il rapporto con la Matematica e, di conseguenza, i risultati finali degli alunni si possono migliorare attraverso la soluzione di problemi non standard in un ambiente di apprendimento cooperativo.

Al fine di dimostrare statisticamente se tali condizioni possono aiutare i bambini nel risolvere individualmente problemi standard, sono stati scelti due diversi gruppi come 'campione sperimentale' (ES) e 'campione di controllo' (CS), e sottoposti allo stesso 'test di ingresso' (BTT) e 'test post trattamento' (ATT). Il primo autore ha proposto ed eseguito i test; ha scelto e presentato nelle classi ES i problemi non-standard utilizzati per il 'trattamento sperimentale' (ET), ha elaborato i dati e ha coinvolto altri tre insegnanti a partecipare nella ricerca. Il secondo autore ha elaborato il quadro teorico della ricerca e supervisionato il lavoro.

2. Quadro teorico. La sperimentazione si è ispirata a diversi campi di ricerca interconnessi: aspetti emozionali-affettivi, problem solving, cooperative learning, problemi non-standard.

Il primo passo della ricerca è stato sugli aspetti emozionali e affettivi: è già stato dimostrato che nell'insegnamento della Matematica le relazioni affettive fra insegnante, singoli alunni e gruppo classe gioca un ruolo fondamentale (McLeod, 1992; Prawat & Anderson, 1994; Cornoldi, 1995). Le prestazioni degli alunni dipendono dal loro sistema di convinzioni e atteggiamenti (Di Martino, 2001; Di Martino & Zan, 2001a e 2001b; Di Martino & Zan, 2002; Zan 2000b, 2000c e 2000d). Abbiamo esaminato in 7 classi questi aspetti relativi ai problemi e alla soluzione individuale dei problemi stessi.

I programmi didattici italiani del 1985 e i più recenti nuovi curricoli per la scuola primaria (2001) pongono attenzione ai problemi come uno strumento di crescita culturale. La soluzione di problemi è raccomandata poiché "Il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di risoluzione di problemi" (dai Programmi Nazionali del 1985). Il punto di partenza di questo campo di ricerca è rappresentato dai libri di Polya (1945 e 1962) e Kleinmuntz (1966). La nostra ricerca è ispirata da questo ambito teorico, come si vede in alcuni più recenti contributi italiani, dovuti alla nuova rilevanza assunta dal tema 'problemi' nei programmi scolastici italiani (e.g. Malara, 1990; Zan, 1991 e 1992; Malara *et al.*, 1992; Colombo

¹ Lavoro eseguito nell'ambito di attività dell'Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica.
Una stesura - anche se parziale ed incompleta - di questo lavoro è riportata in Bertazzoni & Marchini (2005).

Bozzolo & Ferrari, 1995; Formica *et al.*, 2000; Grugnetti & Jaquet, 2000; Zan 2000a; Archetti *et al.*, 2001; Bencivenni & Morini, 2002a and 2002b; Corsini & Zorzi, 2002).

Le tematiche su affettività e problem solving sono strettamente connesse, come è dimostrato in (McLeod & Adams, 1989; De Bellis & Goldin, 1997).

Gli insegnanti dovrebbero tenere conto delle relazioni con gli allievi per migliorare l'apprendimento: *“l'apprendimento è personale, ma ha un ruolo nel contesto sociale delle relazioni interpersonali [...] la facilitazione dell'apprendimento dipende dalla qualità del contatto nelle relazioni interpersonali che emerge dalla comunicazione fra le parti”* (Alrø & Skovsmose, 2002). Quindi l'interazione sociale nella classe (Barwell, 2004), ed in particolare l'apprendimento cooperativo, può essere uno strumento utile per migliorare l'atteggiamento verso la Matematica (Cornoglio, 1996; César, 2000; Facenda & Piccoli, 2000).

La scelta dei problemi è fondamentale per migliorare l'atteggiamento della classe verso il problema. I problemi non devono essere 'esercizi', devono essere pertinenti con un determinato livello di competenza matematica e consentire di fare connessioni con il programma di matematica affrontato in classe: *“(i problemi) devono avere anche l'effetto di motivare gli allievi e stimolare il loro coinvolgimento, in relazione ai vari stadi dello sviluppo, offrire la possibilità di una scelta di strategie risolutive ed opportunità per sviluppare le rappresentazioni dei bambini (in questo modo essi rientrano nell'ambito della definizione di “problemi ricchi” come descritto da Hedrén (2002))”* (citato da Medici & Rinaldi, 2004). Il Rally Matematico Transalpino (Grugnetti & Jaquet, 1999), un contesto matematico internazionale, offre ogni anno una buona collezione di problemi non-standard con queste particolari caratteristiche.

Possiamo qui considerare 'ricco' e 'non-standard' come aggettivi sinonimi della parola 'problema'. L'uso di questo tipo di problemi in connessione con l'apprendimento degli alunni possiede un'abbondante letteratura (e.g. Gravemeijer *et al.*, 1998; Jaworski & Potari, 1998; Murray *et al.*, 1998, Stiegler & Hiebert, 1998; Lubienski, 2000; Grugnetti & Jaquet, 2000; Hedrén, 2002).

Tuttavia l'uso dei problemi non-standard nella scuola è ostacolato da alcuni fattori:

- La difficoltà degli insegnanti nell'affrontare contenuti non strettamente scolastici o non chiaramente riconducibili ad essi;
- la difficoltà degli insegnanti nell'insegnare le strategie necessarie per risolvere problemi non-standard;
- mancanza di strategie uniformi per risolvere problemi di differenti tipi e conseguente difficoltà nella valutazione;
- è necessario più tempo per la soluzione;
- gli alunni potrebbero usare strategie impreviste/imprevedibili;
- gli insegnanti potrebbero non essere consapevoli dell'esistenza dei problemi non-standard per mancanza di conoscenza o di informazione mediante la letteratura di ambito didattico e matematico;

e molti altri.

Per tutti questi motivi, gli insegnanti spesso preferiscono i problemi standard, o meglio, esercizi che applicano ciò che essi hanno insegnato. In un'intervista, alcuni insegnanti dicono che essi usano i problemi non-standard quando gli allievi sono stanchi, probabilmente come un cambiamento rispetto alla routine.

3. La sperimentazione. La sperimentazione ha coinvolto 7 classi del quinto e ultimo anno della scuola primaria (99 bambini di dieci anni); è stata realizzata per verificare se mediante l'uso di problemi non-standard possono migliorare le prestazioni degli alunni riguardo a quelli standard e più in generale il loro atteggiamento verso la Matematica.

3.1 *Indagine metacognitiva*. Prima del test di ingresso di tipo matematico e dell'attività di trattamento, sono stati indagati gli aspetti metacognitivi.

Una prima indagine, con lo scopo di scoprire le convinzioni degli alunni riguardo ai problemi, è stata effettuata assegnando una breve composizione scritta:

“Che cosa è secondo te un problema?”

Citiamo qui alcune risposte degli alunni:

- *Per me un problema è una situazione in cui mi trovo in difficoltà* (Conrad).
- *Secondo me, un problema è una cosa molto brutta* (Marco).
- *Io penso che un problema sia tutto il procedimento per risolvere una situazione. E' una cosa brutta avere dei problemi, e allora perché dovremmo anche inventarceli?* (M).
- *I problemi di matematica non sono per niente divertenti. La cosa peggiore è che devi pensare così tanto che ti viene il mal di testa ...* (Giuseppe).
- *Per me un problema è affrontare una situazione difficile. Quando ho un problema mi agito* (Marianna).
- *Pensavo che i problemi col tempo diminuissero, invece stanno peggiorando. Mi arrabbio molto quando penso a queste cose e spero di trovare una soluzione prima di una crisi di nervi...*(Pietro).

Il secondo passo è stato il seguente questionario (costruito su 20 items scelti da (Poli & Zan, 1996)); lo riportiamo con il numero di risposte fornite a ciascuna domanda:

1. *Secondo te, che cos'è un problema reale, cioè di quelli che capitano nella vita? Scegli una sola risposta:*

- Una situazione in cui si sta male e che si vorrebbe risolvere: ad esempio una malattia, una lite con un amico,... (38 risposte fra 99 bambini)
- Quando si vuole fare una cosa, ma ci sono degli ostacoli. (24)
- Può essere un problema di famiglia, un problema di salute... (30)
- Un guaio, una disgrazia. (7)

2. *Secondo te, perché i problemi di matematica si chiamano proprio “problemi”? Scegli una sola risposta:*

- E' un nome come un altro per distinguerli: si potevano chiamare anche “esercizi”. (6)
- Perché per la mente c'è una situazione difficile da risolvere. (28)
- Perché se un bambino non riesce a risolverlo, si trova in un problema. (14)
- Perché descrivono un problema di qualcuno, e ci chiedono di risolverlo. (51)

3. *Secondo te, che cos'è un problema di matematica? Scegli una sola risposta:*

- Un testo in cui ci sono dei numeri e una domanda. (9)
- Una situazione da risolvere con l'aiuto della matematica. (65)
- Un esercizio in cui bisogna decidere le operazioni da fare, e poi farle. (18)
- Un esercizio che si fa nell'ora di matematica. (6)

4. *Ci può essere, secondo te, un problema di matematica senza numeri?*

- Sì (23)
- No (76)

5. *I problemi di matematica hanno sempre una soluzione?*

- Sì (29)
- No (70)

6. *E' possibile che due compagni risolvano lo stesso problema in due modi diversi e che abbiano ragione tutti e due?*

Si (82)

No (17)

Perché?

7. *Luca dice: «Un problema con tante domande è più difficile di un problema con una domanda sola». Sei d'accordo con lui?*

Si. (42)

No. (47)

Perché?

8. *Alice dice: «Un problema con un testo corto è più facile di uno con un testo lungo». Sei d'accordo con lei?*

Si. (28)

No. (71)

Perché?

9. *Nicola dice: «I problemi con numeri piccoli sono sempre più facili di quelli con numeri grandi». Sei d'accordo con lui?*

Si. (50)

No. (49)

Perché?

10. *Alessia dice: «Per fare un problema l'impegno non conta». Sei d'accordo con lei?*

Si. (5)

No. (94)

Perché?

11. *Matteo dice: «Un problema o lo capisci subito o non lo capisci più». Sei d'accordo con lui?*

Si. (9)

No. (90)

Perché?

12. *Francesca dice: «Per risolvere un problema bisogna saper fare bene i calcoli». Sei d'accordo con lei?*

Si. (73)

No (26)

Perché?

13. *Cristina dice: «Per fare bene i problemi bisogna capire bene quello che si legge». Sei d'accordo con lei?*

Si (99)

No (0)

Perché?

14. *Daniela dice: «Per fare bene i problemi ci sono dei trucchi: basta impararli». Sei d'accordo con lei?*

Si (39)

No (60)

Perché?

15. *Tu conosci qualche trucco? Quale?*

16. *La maestra dice: «Adesso facciamo un problema». Che cosa provi?*
17. *Quando un problema non ti riesce subito, che cosa fai?*
18. *Andrea, Bruna, Claudia e Daniele discutono su che cosa si deve fare per risolvere un problema, ma non sono d'accordo. Tu a chi dai ragione? Scegli una sola risposta:*
- Andrea: «In un problema basta guardare bene certe parole e si capisce subito l'operazione da fare». (15)*
 - Bruna: «Bisogna capire bene la situazione, e poi ragionando capire bene che cosa si deve fare». (68)*
 - Claudio: «E' meglio provare le operazioni che sembrano più adatte ai numeri e alle parole del problema, e poi scegliere quella che torna meglio». (6)*
 - Daniele: «Non si può dire che cosa si deve fare: dipende dal problema che ti capita». (9)*
19. *Marina ha fatto un problema, ma la maestra ha detto che l'ha fatto proprio male! Secondo te, che cosa è successo? Scegli una sola risposta:*
- Ha scritto in modo molto impreciso, con degli errori. (11)*
 - Ha sbagliato a scegliere le operazioni. (35)*
 - Non ha scritto in ordine i dati, la risposta e tutte le cose che si devono scrivere. (31)*
 - Ha sbagliato a fare i conti. (21)*
20. *Quando devi risolvere un problema di matematica, che cosa fai? Scegli una sola risposta:*
- Cerchi di ricordarti se ne hai già fatto uno uguale. (6)*
 - Cerchi di capire che cosa vuole la domanda. (83)*
 - Ti fai dire da un compagno quale operazione ci vuole. (2)*
 - Ricopi il testo e scrivi i dati. (8)*

Questo questionario si compone di domande Si-No, domande Si-No-Perché, domande con quattro possibili risposte, domande aperte. Esse si concentrano su: aspetti affettivi – emozionali dei problemi, il ruolo dei dati numerici, l'esistenza di soluzioni e l'unicità del procedimento risolutivo, relazioni fra le caratteristiche del testo e la difficoltà del procedimento risolutivo, conoscenza e uso di “trucchi”. Inoltre stabiliscono una relazione fra il comportamento dell'alunno e indagano l'atteggiamento degli allievi sia nei confronti delle procedure sia nei confronti degli errori.

Possiamo riassumere i risultati del questionario dicendo che per la maggior parte dei bambini:

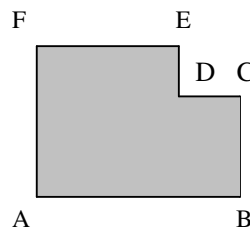
- Un problema si riferisce alla vita privata di ciascuno;
- I problemi di matematica sono caratterizzati dalla presenza di simboli matematici (i numeri);
- L'esistenza della soluzione e l'unicità del procedimento risolutivo non sono caratteristiche rilevanti dei problemi;
- Se il testo è breve, non significa che il problema sia facile;
- L'impegno personale è elemento fondamentale per riuscire;
- I trucchi non sono indispensabili;
- Per riuscire a risolvere un problema è fondamentale tenere conto della struttura logica.

3.2 Test di ingresso, prima delle attività di trattamento (BTT).

Da Ottobre a Dicembre 2001, tutte le classi sono state sottoposte al BTT, che consisteva di otto problemi standard da risolvere individualmente. Tutti gli insegnanti coinvolti nel progetto si sono precedentemente accordati sulla valutazione dei risultati dei problemi standard. Presentiamo qui i problemi; fra parentesi è specificato il tempo assegnato per la soluzione e la valutazione media osservata sui risultati espressa in decimi. Complessivamente il valore medio registrato è stato 5.20.

1. Il fruttivendolo. (1 ora) Un fruttivendolo ha comperato 72 kg di mele al costo di 1.200 lire il kg. E' costretto a scartarne $\frac{2}{9}$ perché sono marcite. Ha intenzione di rivendere le mele rimaste guadagnando 25.600 lire. A quale prezzo al kg dovrà rivenderle? (2.47)

2. Il terreno. (1 ora) Un appezzamento di terreno ha la forma che vedi nel disegno. Si conoscono le seguenti misure: $AB = 130$ m; $BC = 60$ m; $DE = \frac{2}{3} BC$; $EF = \frac{4}{5} AF$. Calcola il perimetro e l'area di questo appezzamento di terreno. (4.77)



3. I cioccolatini. (30 minutes) Per comperare 8 cioccolatini Silvia ha speso 5600 lire. Quanto avrà speso Paolo che ne ha comperato 15? (8.10)

4. Coloured marbles. (30 minutes) Disegna sul quaderno tre contenitori di biglie colorate in cui le probabilità di pescare una biglia verde siano rispettivamente le seguenti: $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{7}$ $\frac{7}{10}$. In quale dei tre contenitori conviene pescare per avere maggiore possibilità di prendere una biglia verde? E per prendere una biglia non verde? (6.56)

5. La società sportiva. (30 minutes) Ad un gruppo sportivo sono iscritti alcuni bambini. Di questi, 18 fanno basket, 12 fanno calcio; 5 fanno contemporaneamente basket e calcio. Quanti sono i bambini iscritti? (4.16)

6. Elena e i nastri. (30 minutes) Elena taglia un nastro in due parti; una risulta più lunga di 8 cm. Taglia poi a metà la parte più corta e ne ricava due pezzi da 36 cm. Quanto era lungo il nastro, all'inizio? In quanti pezzi è stato tagliato? (5.55)

7. L'eredità del pastore. (30 minutes) Un pastore ormai anziano divide le sue pecore fra I quattro figli. Alla fine della ripartizione, il quarto figlio avrà 120 pecore, mentre al terzo figlio ne sono state date 15 in meno del quarto e al secondo 20 in più del terzo. Sapendo che in tutto le pecore erano 500, quante pecore erano state assegnate al primo figlio? (6.58)

8. Le biglie perse. (30 minutes) Al termine di un gioco Fabio ha perso; ha quindi dovuto consegnare ad Andrea 20 biglie. Ora Fabio ha la metà delle biglie Che possiede Andrea. Le biglie in tutto sono 90. Quante biglie possedeva Fabio all'inizio del gioco? E Andrea? (3.39)

Per accrescere la consapevolezza metacognitiva, al termine dell'esecuzione dei problemi 1, 2, 3 e 5 agli alunni è stato chiesto di completare due schede sull'autovalutazione: il primo riguardante le difficoltà del problema e l'esattezza della soluzione; il secondo riguardante la procedura seguita. Un'altra scheda è stata consegnata mentre l'insegnante stava presentando la correzione. Ad ogni alunno è stato chiesto di completarla e di confrontare la propria procedura con la soluzione dell'insegnante.

Segnaliamo anche le relazioni fra la sequenza "cronologica" dell'azione narrata nel testo e le operazioni di soluzione nei problemi da 6 a 8.

Nel problema 6 il tempo della narrazione e quello dell'azione coincidono, ma la sequenza delle operazioni ha un andamento opposto, "a ritroso" (media 5.55).

Nel problema 7, il 'tempo' del testo e l'effettiva sequenza delle azioni narrate sono diversi, mentre la sequenza delle azioni e quella delle operazioni di soluzione coincidono (media 6.58).

Nel problema 8 non vi è coincidenza fra queste tre specie di sequenza cronologica (quella effettiva, quella narrata, quella delle operazioni). Questo problema è il più difficile dei tre, con la media di 3.39.

I risultati raggiunti nel BTT sono stati utilizzati per stabilire una suddivisione degli alunni in due gruppi: quelli che hanno ottenuto i risultati più scarsi hanno costituito il gruppo ES (51 bambini di quattro classi) mentre gli allievi "migliori" (48 bambini di tre classi) hanno costituito il gruppo CS.

Il test finale ATT, costituito dagli stessi 8 problemi standard già visti nel BTT, è stato effettuato nel periodo Aprile - Maggio 2002. In entrambe le prove i bambini hanno lavorato individualmente.

3.3 Il trattamento.

Da Febbraio ad Aprile il campione CS ha continuato a lavorare seguendo un'attività scolastica di tipo tradizionale, cioè con problemi standard come quelli risolti individualmente nella fase BTT, preparandosi alla prova finale: questo è stato il test di controllo (CT).

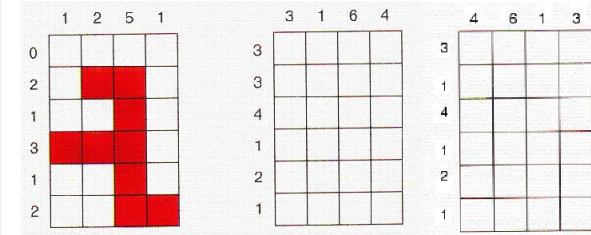
Nel frattempo il gruppo ES è stato sottoposto al trattamento ET che consisteva di 13 problemi non-standard da (Grugnetti & Jaquet, 1998). Questi problemi dovevano essere risolti dagli alunni lavorando in gruppo. Erano stati scelti in modo opportuno affinché i contenuti matematici fossero per quanto possibile analoghi ai contenuti degli 8 problemi standard del BTT.

Presentiamo qui i problemi utilizzati per il trattamento sperimentale.

1. I cammelli di Cleopatra. Cleopatra ha disegnato dei cammelli (con due gobbe) e dei dromedari (con una sola gobba). Ci sono in tutto 21 gobbe e 52 zampe. Cleopatra ha disegnato un uomo su ciascun cammello. Quanti uomini ha disegnato Cleopatra in tutto? Questo problema ha soluzione? Quante soluzioni può avere?

2. A ciascuno le sue medaglie. Quattro bambini hanno vinto in una gara sportiva 21 medaglie. Alessio ne ha vinte più di tutti. Roberto ne ha vinte il doppio di Pietro. Anna ne ha vinte il doppio di Pietro. Anna ne ha vinte tre più di Roberto. Quante medaglie ha vinto ciascun bambino? C'è una sola soluzione?

3. Le griglie. In queste griglie, i numeri a sinistra indicano quanti quadretti rossi sono colorati in ogni riga, i numeri in alto indicano invece i quadretti rossi di ogni colonna. Colora i quadretti rossi della seconda griglia. Sei riuscito a rispettare il numero di quadretti rossi nelle righe e nelle colonne? Colora i quadretti della terza griglia. Sei riuscito a rispettare il numero di quadretti rossi indicati nelle righe e nelle colonne?



4. Il biglietto. Completa la frase che vedi sul biglietto, scrivendo sulla riga vuota un numero in lettere, in modo che la frase sia vera. C'è una soluzione?

La frase scritta su questo
biglietto ha

lettere


5. Gli imballaggi delle uova. Il signor Gallo possiede un grande allevamento di galline. Egli sta preparando la spedizione delle 1250 uova fatte dalle sue galline durante la settimana. I contenitori che usa sono scatole, cartoni, casse. Egli mette 6 uova in ogni scatola; quando ha riempito 10 scatole, con esse riempie un cartone e lo chiude. Quando sono pronti 8 cartoni, con essi egli riempie una cassa e la chiude. Tiene per sé le uova che rimangono sfuse. Poi, con il suo furgone, porta al magazzino le uova imballate. Quante casse piene riceve il magazziniere? Quanti sono i cartoni che non stanno nelle casse? Quante le scatole che non stanno nelle casse e nei cartoni? Quante uova deve tenere per sé il signor Gallo?

6. Numeri in codice. Nella tabella che vedi, i numeri sono stati nascosti dai disegni. Uno stesso disegno nasconde sempre lo stesso numero. A destra e in basso sono scritte rispettivamente le somme dei numeri di ogni riga e di ogni colonna. Trova i numeri che si nascondono sotto i disegni. Questo problema ha soluzione?

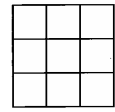
♥	✕	✂	✕	♥	14
♦	✂	♦	♦	♦	32
✂	♥	✕	♥	✂	20
✕	♦	♥	✂	✕	19
17	17	17	17	17	

7. Galline in fuga. Ad un contadino sono scappate tutte le galline! Alla fine della giornata il contadino ne ha recuperato la metà. Il giorno dopo riesce a catturare la metà delle galline ancora in fuga. Il terzo giorno ci sono ancora 20 galline in libertà. Quante erano le galline scappate?

8. Logix. Sistema i 9 pezzi nelle 9 caselle della griglia, rispettando le indicazioni:

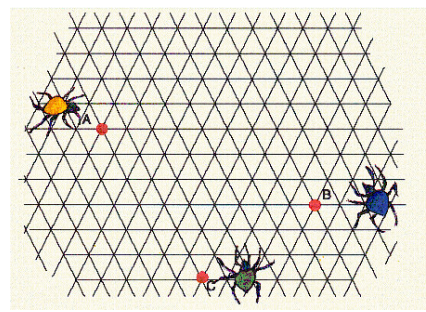
Nella prima riga ci sono il quadrato rosso, il cerchio blu e il 

triangolo blu. Nella seconda riga ci sono due cerchi e un triangolo. Il quadrato blu è nella terza riga, tra due pezzi gialli. Nella colonna di sinistra sono differenti sia le forme sia i colori. Nella colonna di mezzo non ci sono triangoli. Nella colonna di destra c'è un cerchio fra due triangoli. Al centro della griglia c'è un pezzo giallo. Questo problema ha soluzione? Quante soluzioni può avere?



9. Quattro amiche. Floriana, Luisa, Giulia e Alessia sono quattro amiche che abitano nella stessa cittadina. Giulia e la sua amica che abita in una villa si incontrano regolarmente per giocare a tennis, mentre Luisa e l'amica che abita all'hotel non sanno giocare. Sia la ragazza che abita in una villa, sia Floriana hanno una bicicletta rossa. Luisa abita a qualche centinaio di metri dal castello. Chi, tra le quattro amiche, abita al castello e chi in appartamento? Questo problema ha soluzioni? Quante soluzioni esistono?

10. Tre amici ragni. I tre ragni Alberto (A), Biagio (B) e Claudio (C) vivono sui nodi della stessa tela. Essi si dispongono sempre lungo i fili. Fra due nodi vicini della loro tela c'è una distanza di un filometro. Su questa tela si misurano le distanze fra due nodi seguendo il cammino più corto che porta dall'uno all'altro. Claudio abita a 6 filometri da Biagio e a 7 filometri da Alberto. Questi tre simpatici ragni si incontrano ogni giorno per prendere il caffè al bar "Mosca Verde" che si trova alla stessa distanza da ciascuna delle loro case. Segna sulla tela la posizione in cui si trova il bar. Segna il cammino più corto che ogni ragno deve compiere per andare al bar. Di quanti filometri è? Vi è una sola possibilità o ve ne sono molte? Qual è la distanza in filometri fra la casa di Alberto e quella di Biagio? Indica le risposte giuste:

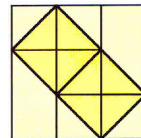
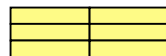


I percorsi che Alberto può fare per andare al bar "Mosca Verde" sono:

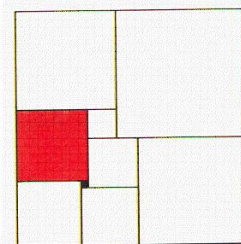
- Molti Tutti della stessa lunghezza Uno solo Di lunghezze diverse

11. Il cestino di frutta. In un cestino ci sono dei frutti. Sono tutte mele, salvo due. Sono tutte arance, salvo due. Sono tutte banane, salvo due. Quanti frutti ci sono nel cestino, e di che tipo? Questo problema ha soluzione? Quante soluzioni può avere?

12. Rettangoli e quadrati. Quanti rettangoli è possibile contare in questa figura?



Quanti quadrati è possibile contare in questo disegno?



13. Una parete di piastrelle. Il quadrilatero che vedi è formato da 9 piastrelle tutte quadrate. Marco ha misurato il lato della piastrella nera più piccola e ha notato che è lungo come un fiammifero, mentre il lato della piastrella rossa vicina è lungo come 10 fiammiferi. Quali sono, misurate con i fiammiferi di Marco, le dimensioni del quadrilatero?

Di che tipo di quadrilatero si tratta?

3.4 Indagine metacognitiva dopo il trattamento sperimentale.

Al termine delle attività di trattamento al campione ES è stata assegnata una breve composizione scritta:

“Risolvere problemi in gruppo. Come ti è sembrata l’attività? E’ stato utile collaborare con i compagni? Hai incontrato difficoltà? Quali? Con quale compagno ti sei trovato meglio e perché? Pensi di avere imparato qualcosa di nuovo (non solo sulla matematica...)? Che cosa proporresti, in futuro, per fare e imparare di più o di meglio?”

Citiamo alcune risposte degli allievi:

- *Il lavoro di gruppo mi sembra una bella attività ed è utile collaborare con i compagni... Io proporrei in futuro di continuare con i problemi (Connrad).*
- *Con i problemi quando sono in gruppo con i miei amici lavoro bene, perché quando non so più andare avanti i miei compagni mi aiutano... Quando lavoriamo in gruppo mi sento più tranquillo e lavoro meglio (Marco).*
- *Lavorare con i propri compagni è divertente perché esprimiamo le cose con parole semplici e non ‘megagalattiche’ (Nadia).*
- *Se devo essere sincera, la matematica e la geometria mi piacciono. Ma mi è un po’ antipatica la maestra... A me piacciono molto i gruppi perché i tuoi amici ti fanno imparare delle cose che la maestra non riesce a dire con le nostre parole (Anna).*
- *Io con questi gruppi di lavoro mi sento più brava! (Marilena).*
- *Con questa attività abbiamo imparato a stare con gli altri, e che la matematica non è fatta solo di numeri ma anche di parole (Silvia & Martina).*

4. Metodologia. I problemi nella fase BTT (e ATT) sono stati presentati in entrambi i gruppi secondo la normale modalità scolastica, con la sola differenza che gli alunni hanno lavorato in forma anonima, in modo da non sentirsi inibiti da una valutazione sul lavoro proposto. Non è stato consentito l’uso di cancellature o fluido correttore per poter analizzare il procedimento risolutivo degli allievi.

Le attività sperimentali con problemi non-standard risolti lavorando in gruppo e discussi in classe hanno occupato molto tempo. Durante queste attività i gruppi ogni volta sono stati formati cambiandone liberamente la composizione; il ruolo del primo autore come insegnante è stato prevalentemente di controllo e di incoraggiamento: fin dall’inizio del trattamento la nuova attività è stata destabilizzante per i bambini; in seguito il ruolo dell’insegnante si è progressivamente ridimensionato per creare situazioni a-didattiche mediante problemi non-standard. Al termine della soluzione di ogni problema, l’insegnante raccoglieva i protocolli e discuteva le soluzioni presentate da ogni gruppo.

5. Risultati e conclusioni. I risultati qualitativi sono da porre in relazione con gli aspetti metacognitivi. I risultati del questionario tratto da Poli & Zan (1996) ha messo in evidenza che quasi il 70% degli alunni interpreta la parola “problema” in relazione alla propria vita privata e, in generale, con una connotazione negativa.

Alla fine della sperimentazione questo atteggiamento è cambiato per gli alunni del gruppo ES; proponiamo alcune citazioni relative ai due brevi testi scritti dai bambini rispettivamente prima e dopo il trattamento. Appare chiaramente che l’atteggiamento degli allievi verso i problemi è migliorato molto, ad esempio da «I problemi di matematica non sono per nulla divertenti» a «Proporrei in futuro di continuare con i problemi» (Connrad).

I risultati quantitativi della sperimentazione sono riassunti nella seguente tabella:

Problemi n°		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	Media generale
Valori medi Gruppi-Campione										
ES	BTT	2.02	5.51	7.76	6.02	4.16	5.15	6.65	3.14	5.05
	ATT	9.08	7.45	8.80	8.54	8.53	7.90	8.24	8.63	8.40
CS	BTT	2.96	4.00	8.47	7.15	4.15	5.96	6.51	3.66	5.37
	ATT	5.44	6.43	8.83	7.60	5.62	7.21	7.87	4.11	6.64

Le celle a sfondo azzurro indicano la differenza statisticamente significativa rilevata (tramite il test iniziale) nei valori medi del BTT fra i risultati dei due campioni. Le celle a sfondo giallo nei valori medi di ATT indicano una differenza statisticamente significativa fra i punteggi ottenuti nelle prove *BTT* e *ATT*; le caselle bordate di rosso indicano i risultati significativamente differenti fra i gruppi ES e CS.

L'incremento nei valori medi dei due gruppi campione mostra che c'è un miglioramento "naturale" dovuto alla scolarizzazione e alla maturazione degli alunni, ma, il trattamento sperimentale sembra fornire un importante contributo nell'apprendere a risolvere correttamente anche i problemi standard.

In conclusione, il tempo "perso" nella soluzione in gruppo dei problemi non-standard e nella conseguente discussione collettiva sembrano compensare con migliori risultati scolastici nella normale pratica della soluzione di problemi. I miglioramenti riguardano argomenti fondamentali di aritmetica, geometria, pensiero proporzionale, probabilità, teoria degli insiemi, etc. Nei problemi da 6 a 8, le relazioni fra il "tempo" del testo (cioè dell'esposizione della situazione) e il "tempo" della soluzione (cioè la sequenza cronologica del procedimento risolutivo) è una tematica molto importante (Archetti *et al.*, 2001). Gli alunni del gruppo ES hanno risolto il più difficile fra i tre problemi (*Le biglie perse*) meglio rispetto agli altri due. Questi miglioramenti non sembrano essere dovuti ad un allenamento sugli argomenti specifici, e ciò è particolarmente interessante.

Dai testi brevi e dal questionario emerge che l'ambiente / il clima di lavoro della classe ne ha beneficiato e l'atteggiamento degli alunni verso la matematica è notevolmente migliorato; inoltre i bambini hanno affrontato i problemi con spirito più sereno. Secondo noi l'esperienza effettuata mostra che i problemi non-standard contribuiscono al progresso della classe in ambito matematico.

Il primo autore, in quanto insegnante, ha avuto l'opportunità di cambiare molto la propria modalità di insegnamento. Quando la sperimentazione era iniziata, insegnava in due classi quinte (coinvolte nella sperimentazione), che avrebbero dovuto sostenere l'esame finale e risolvere i problemi, visti con grande timore. E' stata quindi vinta la sfida di ottenere un cambiamento nelle convinzioni degli alunni nei confronti della matematica ed un miglioramento dei loro risultati; l'insegnante ritiene ragionevolmente che il tempo dedicato alla soluzione di problemi non-standard in gruppo non rappresenti un tempo "spreco" e che le difficoltà di cui si è riferito nel §2 possono essere superate.

Bibliografia

- Alrø, H. & Skovsmose, O.: 2002, *Dialogue and learning in Mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.
- Archetti, A. & Armiento, S. & Basile, E., Cannizzaro, L. & Crocini, P. & Saltarelli, L.: 2001, 'Strutture temporali e processi di rappresentazione nella soluzione dei problemi', in Navarra, G. & Reggiani, M. & Tortora, R. (eds.) *Valutazione dei processi di apprendimento con particolare riferimento alle difficoltà*, 31 – 37.

- Barwell, R.: 2004, 'Rhetorical devices in mathematics classroom interaction: solving a word problem', *Proceedings CERME 3* (Bellaria), TG8_Barwell_cerme3.pdf
- Bencivenni, I. & Morini, C.: 2002a, 'Sulle abilità psico-cognitive nella risoluzione di problemi a livello elementare' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 25A, n. 1, 63 - 77.
- Bencivenni, I. & Morini, C.: 2002b, 'La rappresentazione: un concetto importante per gli insegnanti della scuola elementare' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 25A, n. 3, 271 - 282.
- Bertazzoni, B. & Marchini, C.: 2005 'Improving classroom environment by problem solving', in Novotná, J. *Proceedings Semt '05*, 78 – 86
- César, M.: 2000, 'Peer interaction: a way to integrate cultural diversity in mathematics education', in Ahmed, A. & Kraemer, J.-M. & Williams, H. (eds.), *Cultural diversity in mathematics (education): CIEAEM 51*, Horwood Publishing, Chichester, 147 – 153.
- Colombo Bozzolo, C. & Ferrari, M.: 1995, *Problemi di aritmetica*, Quaderno didattico n. 10, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*.
- Cornoldi, C., 1995, *Metacognizione e apprendimento*, Il Mulino, Bologna.
- Corsini, A & Zorzi, C.: 2002, 'Il problem solving elementare' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 25A, n. 2, 151 – 168.
- Cornoglio, M.: 1996, *Insegnare ed apprendere in gruppo – Il cooperative learning*, LAS, Roma
- Di Martino, P.: 2002, 'Alcune riflessioni critiche sulla definizione di atteggiamento nei confronti della matematica', in Malara, N.A. & Marchini, C. & Navarra, G. & Tortora, R. (eds.) *Processi didattici innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora, Bologna, 71 – 81.
- Di Martino P., Zan R.: 2001a, 'Attitude toward mathematics: some theoretical issues', in M. van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) *Proceedings of PME 25* (Utrecht), vol.3, 351-358
- Di Martino P., Zan R.: 2001b, 'The problematic relationship between beliefs and attitudes'. In Riita Soro (ed.), *Proceedings of the MAVI-X European Workshop*, (Kristianstad), 17-24
- Di Martino P., Zan R.:2002, 'An attempt to describe a 'negative' attitude toward mathematics'. In Di Martino, P. (Ed.) *Proceedings of the MAVI-XI European Workshop*, (Pisa), 22-29.
- De Bellis, V. A. & Goldin, G. A.: 1997, 'The Affective Domain in Mathematical Problem-Solving', in Pehkonen, E. (ed.), *Proceedings of PME 21st*, (Lahti), vol. 2, pp. 209-216.
- Facenda, A.M. & Piccoli, A.M.: 2000, 'Mathematics learning and social interaction in small groups', in Ahmed, A. & Kraemer, J.-M. & Williams, H. (eds.), *Cultural diversity in mathematics (education): CIEAEM 51*, Horwood Publishing, Chichester, 305 – 309.
- Formica, D. & Italia, G. & Lo Cicero, A. & Milone, C. & Mirabella, A. & Riggio, R.: 2000, 'Il problema dei problemi: analisi di difficoltà di comprensione del testo', elementare' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A, n. 4, 365 – 386.
- Gravemeijer, K. & McClain, K. & Stephan, M.: 1998, 'Supporting students' construction of increasingly sophisticated ways of reasoning through problem solving', in Oliver, A. & Newstead, K. (eds.), *Proceedings of PME 22th* (Stellenbosch), Vol. 1, 194 – 201.
- Grugnetti, L. & Jaquet, F.: 1998, *Problemi che passione!*, Il Capitello, Torino.
- Grugnetti, L. & Jaquet, F. (eds.): 1999, *Le Rally Mathématique Transalpin. Quels profits pour la didactique?*, Pitagora, Bologna.
- Grugnetti, L. & Jaquet, F.: 2000, 'Analyse comparative des procédures de résolution de problèmes', in Ahmed, A. & Kraemer, J.-M. & Williams, H. (eds.), *Cultural diversity in mathematics (education): CIEAEM 51*, Horwood Publishing, Chichester, 329 – 336.

- Hedrén, R.: 2002 'Learning in mathematics during group discussion of some rich problems', in Novotná, J. (ed.) *Proceedings CERME 2* (Mariánské Lázně), Charles University, Praha, Part 2, 386-398.
- Jaworski, B. & Potari, D.: 1998, 'Characterising mathematics teaching using the teaching triad', in Oliver, A. & Newstead, K. (eds.), *Proceedings of PME 22th* (Stellenbosch), Vol. 3, 88 – 95.
- Kleinmuntz, B. (ed.), 1966, *Problem solving: research methods and theory*, Wiley & Sons, New York.
- Lubienski, S.T.: 2000, 'Problem solving as a means towards mathematics for all: Ex exploratory look through a class lens', *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 454 – 482.
- Malara, N.: 1990, 'Affinamento della capacità di soluzione dei problemi in allievi di scuola media (11-14 anni). Resoconto di due anni di attività', *La matematica e la sua didattica*, Armando, Roma, Anno IV, n. 2, 39 – 53.
- Malara, N. & Pellegrino, C. & Iaderosa, R.: 1992, 'Avvio ad attività di matematizzazione attraverso problemi', in D'Amore, B. & Pellegrino, C. (eds.) *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*, 111 – 121.
- McLeod, D. & Adams V. (Eds.): 1989, *Affect and Mathematical Problem Solving*, Springer Verlag, New York.
- McLeod, D. (1992). 'Research on Affect in Mathematics Education: a Reconceptualisation'. in Grouws, D.A. (ed.) *Handbook of Research in Mathematics Education Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 575-596.
- Medici, D. & Rinaldi, M.G.:2004, 'A teaching resource for teacher training', *Proceedings CERME 3* (Bellaria), TG12_Medici_cerme3.pdf.
- Murray, H. & Oliver, A. & Human, P.: 1998, 'Learning through problem solving, in Oliver, A. & Newstead, K. (eds.), *Proceedings of PME 22th* (Stellenbosch), Vol. 1, 169 – 185.
- Poli, P. & Zan, R.: 1996, 'Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione dei problemi', *La matematica e la sua didattica*, Pitagora, Bologna, n. 4, 441 – 466.
- Polya, G.: 1945, *How to solve it: a new aspects of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, 1945.
- Polya, G.: 1962, *Mathematical discovery on understanding, learning and teaching problem solving*, Wiley & Sons, New York.
- Prawat, R.S.& Anderson, A.L.H.: 1994. 'The Affective Experiences of Students', *The Journal of Mathematical Behavior*, 13, 201-221.
- Stiegler, J.W. & Hiebert, J.: 1998, 'Teaching is a cultural activity', *American Educator*, 4 – 11.
- Zan, R.: 1991, 'I modelli concettuali di problemi nei bambini della scuola elementare' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 14, 1st part n. 7, 659 – 677; 2nd part n. 9, 807 – 840.
- Zan, R.: 1992, 'I modelli concettuali di problemi nei bambini della scuola elementare – terza parte' *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 15, 39 – 53.
- Zan, R.: 2000a, 'L'insegnante come solutore di problemi', *La matematica e la sua didattica*, Pitagora, Bologna, n. 1, 48 - 71.
- Zan, R.: 2000b, 'Le convinzioni', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A, n. 2, 161 – 197.
- Zan, R.: 2000c, 'Emozioni e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A, 1st part n. 3, 207 – 232; 2nd part, n. 4, 327 – 345.
- Zan, R.: 2000d, 'Atteggiamenti e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, Vol. 23A n. 5, 441 – 465.