X Ciclo

1) Rispondere in poche righe a ciascuna delle seguenti domande:

a) Un neutrone ha una lunghezza d'onda di 1 Å, e velocità diretta verticalmente verso l'alto. A che altezza arriva?

b) Un gas subisce una trasformazione ciclica formata da una espansione adiabatica irreversibile, una compressione adiabatica reversibile e un'isocora reversibile. La sua entropia è restata costante o è aumentata? e durante l'isocora la sua temperature è diminuita, restata costante o è aumentata?

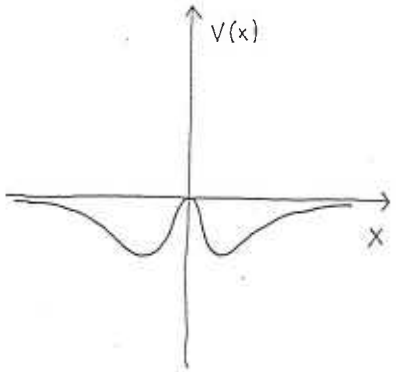
c) Che caratteristica deve avere un telescopio per distinguere due punti distanti 5 mm alla distanza di un Km?

d) Uno strumento misura l'impedenza tra due punti (ad una frequenza nota). Con questo, come si puo determinare il coefficiente di mutua induzione di un trasformatore? fare uno schema.

2)Si discutano i seguenti problemi:

a) Si ha una sorgente puntiforme che emette luce con $\lambda \simeq 1\mu m$ in un angolo di 20°, e si dispone di un reticolo piano di 2 cm di diametro e 500 linee/mm. Fare uno schema di monocromatore (usando anche una lente ed una fenditura) indicando le distanze fra gli elementi, il diametro e la focale della lente la larghezza della fenditura e la risoluzione ottenuta.

b) Un elettrone si trova in un potenziale V(x) costituito da due buche simmetriche come rappresentato in figura (V(0)=0). Considerando lo spettro discreto degli stati stazionari, lo si discuta qualitativamente e si determinino la forza media buca particella e buca-buca.



11° ciclo Verbale 2 Allegato A

Problema 1

Determinare la dimensione critica che deve avere un oggetto (assimilabile a una sfera di raggio a) affinché si trovi in equilibrio tra la forza di radiazione e la forza di gravità esercitate su di esso dal sole, nell'ipotesi di assorbimento totale della radiazione incidente. La densità dell'oggetto sia $\rho = 5.7 \times 10^3 kg/m^3$.

Si tenga conto che la temperatura superficiale del sole è $T_S \simeq 5760K$, il raggio solare è $R_S \simeq 0.696 \times 10^6 km$ e la massa del sole è $M_S \simeq 1.97 \times 10^{30} kg$. Si assuma $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$ (costante di Stefan-Boltzmann) e $G = 6.7 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ (costante di gravitazione universale).

Problema 2

Il "modello di Hubbard" per la molecola di idrogeno consiste nell'assumere che l'unico effetto dell'interazione elettrone-elettrone V_{12} sia dovuto alla presenza dell'elemento di matrice di repulsione coulombiana intra-atomica

$$U = < \psi_a(1)\psi_a(2)|V_{12}|\psi_a(1)\psi_a(2) >,$$

dove $\psi_a(i)$, $(i = 1, 2)$ rappresenta la funzione d'onda dell'elettrone i-esimo sull'atomo a (un analogo termine deriva dall'atomo b).

Nel seguito consideriamo fissa la distanza internucleare e per semplicità trascuriamo l'integrale di sovrapposizione

$$S = < \psi_a|\psi_b > .$$

A): se prima consideriamo la molecola ionizzata (H_2^+), la hamiltoniana h per il singolo elettrone contiene l'energia cinetica dell'elettrone stesso e i potenziali attrattivi da parte dei due nuclei a e b. Supponendo che siano noti gli elementi di matrice:

$$< \psi_a|h|\psi_a > = < \psi_b|h|\psi_b > = \epsilon,$$

$$< \psi_a|h|\psi_b > = < \psi_b|h|\psi_a > = -t$$

(con t reale positivo), si scrivano i due stati elettronici del sistema, che si ottengono a partire dalle funzioni d'onda atomiche ψ_a e ψ_b con il metodo della combinazione lineare di orbitali atomici, e le loro energie.

B): consideriamo ora il problema a due elettroni, descritto dalla hamiltoniana

$$H = h_1 + h_2 + V_{12}.$$

Il set completo di stati di singoletto (spazialmente simmetrici) è dato (a meno della parte di spin) da:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_b(1)\psi_a(2)],$$

$$\Phi_1 = \psi_a(1)\psi_a(2), \quad \Phi_2 = \psi_b(1)\psi_b(2).$$

Si rappresenti la hamiltoniana del sistema H sulla base di questi stati nell'ipotesi di Hubbard e si trovi lo stato fondamentale del sistema (a meno di un fattore di normalizzazione) e la sua energia.

C): si commenti il comportamento del sistema nei due limiti opposti di grande e piccolo U/t e si discuta la relazione con l'approssimazione Heitler-London (secondo la quale Φ_0 rappresenta lo stato di singoletto) e con l'approssimazione di elettroni indipendenti.

Problema 3

La costante di Planck vale circa $6.63\ 10^{-34} J \cdot s$. La costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-16}$ erg/K.

Anche un circuito elettrico può fungere da termometro.

Consideriamo un circuito costituito da una resistenza R, da una capacità C e da una induttanza L collegate fra loro ciclicamente. R vale 1.5 Ω, L vale 10 μ H, C vale 10 pF.

In quanti cicli si smorzano le oscillazioni naturali del circuito?

Il circuito è tenuto in un termostato; possiamo misurare la tensione ai capi dell'induttanza. Ai capi dell'induttanza misuriamo una tensione quadratica media di $(1mV)^2$.

Quale sensazione proveremmo toccando il circuito?

Se invece misurassimo una tensione quadratica media di $(1\mu V)^2$ quale sensazione proveremmo?

Quanti fotoni sono presenti mediamente nel circuito nei due casi?

Quando non potremmo più usare il dispositivo come termometro?

Problema 4

Carica dell'elettrone circa $1.6\ 10^{-19}$ coulomb.

Costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-23}$ Joule/K.

Un cristallo monoatomico ha struttura cubica con gli atomi ai vertici del cubo. Il centro della cella è un possibile sito interstiziale.

Assumiamo che l'energia per spostare un atomo dal reticolo principale in un sito interstiziale adiacente sia 0.1eV mentre quella per separare ulteriormente l'interstiziale dalla vacanza sia molto maggiore.

Valutare la concentrazione di interstiziali al variare della temperatura rimanendo a concentrazioni piccole.

Rifare la valutazione nell'ipotesi che l'energia per occupare un interstizio sia indipendente dalla prossimità ad una vacanza.

Discutere e confrontare in cinque righe i due risultati.

Tema

Scegliere uno fra i temi proposti e svolgerlo strettamente nel limite di 150 parole immaginando di dover scrivere un articoletto divulgativo.

—Bosoni e Fermioni.
—Transizioni di fase e dimensionalità.
--Entropia e disordine.

Verbale 2 - Allegato B

2

Problema 1

Determinare la dimensione critica che deve avere un oggetto (assimilabile a una sfera di raggio a) affinché si trovi in equilibrio tra la forza di radiazione e la forza di gravità esercitate su di esso dal sole, nell'ipotesi di assorbimento totale della radiazione incidente. La densità dell'oggetto sia $\rho = 5.7 \times 10^3 kg/m^3$.

Si tenga conto che la temperatura superficiale del sole è $T_S \simeq 5760K$, il raggio solare è $R_S \simeq 0.696 \times 10^6 km$ e la massa del sole è $M_S \simeq 1.97 \times 10^{30} kg$. Si assuma $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$ (costante di Stefan-Boltzmann) e $G = 6.7 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ (costante di gravitazione universale).

Problema 2

Il "modello di Hubbard" per la molecola di idrogeno consiste nell'assumere che l'unico effetto dell'interazione elettrone-elettrone V_{12} sia dovuto alla presenza dell'elemento di matrice di repulsione coulombiana intra-atomica

$$U = < \psi_a(1)\psi_a(2)|V_{12}|\psi_a(1)\psi_a(2) >,$$

dove $\psi_a(i)$, $(i = 1, 2)$ rappresenta la funzione d'onda dell'elettrone i-esimo sull'atomo a (un analogo termine deriva dall'atomo b).

Nel seguito consideriamo fissa la distanza internucleare e per semplicità trascuriamo l'integrale di sovrapposizione

$$S = < \psi_a|\psi_b > .$$

A): se prima consideriamo la molecola ionizzata (H_2^+), la hamiltoniana h per il singolo elettrone contiene l'energia cinetica dell'elettrone stesso e i potenziali attrattivi da parte dei due nuclei a e b. Supponendo che siano noti gli elementi di matrice:

$$< \psi_a|h|\psi_a > = < \psi_b|h|\psi_b > = \epsilon,$$

$$< \psi_a|h|\psi_b > = < \psi_b|h|\psi_a > = -t$$

(con t reale positivo), si scrivano i due stati elettronici del sistema, che si ottengono a partire dalle funzioni d'onda atomiche ψ_a e ψ_b con il metodo della combinazione lineare di orbitali atomici, e le loro energie.

B): consideriamo ora il problema a due elettroni, descritto dalla hamiltoniana

$$H = h_1 + h_2 + V_{12}.$$

Il set completo di stati di singoletto (spazialmente simmetrici) è dato (a meno della parte di spin) da:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_b(1)\psi_a(2)],$$

$$\Phi_1 = \psi_a(1)\psi_a(2), \quad \Phi_2 = \psi_b(1)\psi_b(2).$$

Si rappresenti la hamiltoniana del sistema H sulla base di questi stati nell'ipotesi di Hubbard e si trovi lo stato fondamentale del sistema (a meno di un fattore di normalizzazione) e la sua energia.

C): si commenti il comportamento del sistema nei due limiti opposti di grande e piccolo U/t e si discuta la relazione con l'approssimazione Heitler-London (secondo la quale Φ_0 rappresenta lo stato di singoletto) e con l'approssimazione di elettroni indipendenti.

Problema 3

La costante di Planck vale circa $6.63\ 10^{-34} J \cdot s$. La costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-16}$ erg/K.

Anche un circuito elettrico può fungere da termometro.

Consideriamo un circuito costituito da una resistenza R, da una capacità C e da una induttanza L collegate fra loro ciclicamente. R vale 1.5 Ω, L vale 10 μ H, C vale 10 pF.

In quanti cicli si smorzano le oscillazioni naturali del circuito?

Il circuito è tenuto in un termostato; possiamo misurare la tensione ai capi dell'induttanza. Ai capi dell'induttanza misuriamo una tensione quadratica media di $(1mV)^2$.

Quale sensazione proveremmo toccando il circuito?

Se invece misurassimo una tensione quadratica media di $(1\mu V)^2$ quale sensazione proveremmo?

Quanti fotoni sono presenti mediamente nel circuito nei due casi?

Quando non potremmo più usare il dispositivo come termometro?

Problema 4

Carica dell'elettrone circa $1.6\ 10^{-19}$ coulomb.

Costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-23}$ Joule/K.

Un cristallo monoatomico ha struttura cubica con gli atomi ai vertici del cubo. Il centro della cella è un possibile sito interstiziale.

Assumiamo che l'energia per spostare un atomo dal reticolo principale in un sito interstiziale adiacente sia 0.1eV mentre quella per separare ulteriormente l'interstiziale dalla vacanza sia molto maggiore.

Valutare la concentrazione di interstiziali al variare della temperatura rimanendo a concentrazioni piccole.

Rifare la valutazione nell'ipotesi che l'energia per occupare un interstizio sia indipendente dalla prossimità ad una vacanza.

Discutere e confrontare in cinque righe i due risultati.

Tema

Scegliere uno fra i temi proposti e svolgerlo strettamente nel limite di 150 parole immaginando di dover scrivere un articoletto divulgativo.

—Principio di Pauli.
—Interazione elettrone-elettrone e spin-orbita negli atomi.
—Fenomeni di trasporto.

Verbale 2 Allegato C

Problema 1

Determinare la dimensione critica che deve avere un oggetto (assimilabile a una sfera di raggio a) affinché si trovi in equilibrio tra la forza di radiazione e la forza di gravità esercitate su di esso dal sole, nell'ipotesi di assorbimento totale della radiazione incidente. La densità dell'oggetto sia $\rho = 5.7 \times 10^3 kg/m^3$.

Si tenga conto che la temperatura superficiale del sole è $T_S \simeq 5760K$, il raggio solare è $R_S \simeq 0.696 \times 10^6 km$ e la massa del sole è $M_S \simeq 1.97 \times 10^{30} kg$. Si assuma $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$ (costante di Stefan-Boltzmann) e $G = 6.7 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ (costante di gravitazione universale).

Problema 2

Il "modello di Hubbard" per la molecola di idrogeno consiste nell'assumere che l'unico effetto dell'interazione elettrone-elettrone V_{12} sia dovuto alla presenza dell'elemento di matrice di repulsione coulombiana intra-atomica

$$U = < \psi_a(1)\psi_a(2)|V_{12}|\psi_a(1)\psi_a(2) >,$$

dove $\psi_a(i)$, $(i = 1, 2)$ rappresenta la funzione d'onda dell'elettrone i-esimo sull'atomo a (un analogo termine deriva dall'atomo b).

Nel seguito consideriamo fissa la distanza internucleare e per semplicità trascuriamo l'integrale di sovrapposizione

$$S = < \psi_a|\psi_b > .$$

A): se prima consideriamo la molecola ionizzata (H_2^+), la hamiltoniana h per il singolo elettrone contiene l'energia cinetica dell'elettrone stesso e i potenziali attrattivi da parte dei due nuclei a e b. Supponendo che siano noti gli elementi di matrice:

$$< \psi_a|h|\psi_a > = < \psi_b|h|\psi_b > = \epsilon,$$

$$< \psi_a|h|\psi_b > = < \psi_b|h|\psi_a > = -t$$

(con t reale positivo), si scrivano i due stati elettronici del sistema, che si ottengono a partire dalle funzioni d'onda atomiche ψ_a e ψ_b con il metodo della combinazione lineare di orbitali atomici, e le loro energie.

B): consideriamo ora il problema a due elettroni, descritto dalla hamiltoniana

$$H = h_1 + h_2 + V_{12}.$$

Il set completo di stati di singoletto (spazialmente simmetrici) è dato (a meno della parte di spin) da:

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_b(1)\psi_a(2)],$$

$$\Phi_1 = \psi_a(1)\psi_a(2), \quad \Phi_2 = \psi_b(1)\psi_b(2).$$

Si rappresenti la hamiltoniana del sistema H sulla base di questi stati nell'ipotesi di Hubbard e si trovi lo stato fondamentale del sistema (a meno di un fattore di normalizzazione) e la sua energia.

C): si commenti il comportamento del sistema nei due limiti opposti di grande e piccolo U/t e si discuta la relazione con l'approssimazione Heitler-London (secondo la quale Φ_0 rappresenta lo stato di singoletto) e con l'approssimazione di elettroni indipendenti.

Problema 3

La costante di Planck vale circa $6.63\ 10^{-34} J \cdot s$. La costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-16}$ erg/K.

Anche un circuito elettrico può fungere da termometro.

Consideriamo un circuito costituito da una resistenza R, da una capacità C e da una induttanza L collegate fra loro ciclicamente. R vale 1.5 Ω, L vale 10 μ H, C vale 10 pF.

In quanti cicli si smorzano le oscillazioni naturali del circuito?

Il circuito è tenuto in un termostato; possiamo misurare la tensione ai capi dell'induttanza. Ai capi dell'induttanza misuriamo una tensione quadratica media di $(1mV)^2$.

Quale sensazione proveremmo toccando il circuito?

Se invece misurassimo una tensione quadratica media di $(1\mu V)^2$ quale sensazione proveremmo?

Quanti fotoni sono presenti mediamente nel circuito nei due casi?

Quando non potremmo più usare il dispositivo come termometro?

Problema 4

Carica dell'elettrone circa $1.6\ 10^{-19}$ coulomb.

Costante di Boltzmann k_B circa $1.38\ 10^{-23}$ Joule/K.

Un cristallo monoatomico ha struttura cubica con gli atomi ai vertici del cubo. Il centro della cella è un possibile sito interstiziale.

Assumiamo che l'energia per spostare un atomo dal reticolo principale in un sito interstiziale adiacente sia 0.1eV mentre quella per separare ulteriormente l'interstiziale dalla vacanza sia molto maggiore.

Valutare la concentrazione di interstiziali al variare della temperatura rimanendo a concentrazioni piccole.

Rifare la valutazione nell'ipotesi che l'energia per occupare un interstizio sia indipendente dalla prossimità ad una vacanza.

Discutere e confrontare in cinque righe i due risultati.

Tema

Scegliere uno fra i temi proposti e svolgerlo strettamente nel limite di 150 parole immaginando di dover scrivere un articoletto divulgativo.

—Interazione di scambio.
—Effetto tunnel.
—Trasformazioni termodinamiche.

R° ciclo

I) -- La conducibilità elettrica σ è molto più elevata nei metalli che nei semiconduttori, mentre la mobilità μ dei portatori di carica è in genere più elevata nei semiconduttori.

a - Giustificare l'affermazione precedente.

b - Esporre sinteticamente una corretta procedura sperimentale per la misura di σ e di μ in un campione a forma di barra parallelepipeda.

c - Dovendo realizzare un sensore di campo magnetico basato sull'effetto Hall e caratterizzato dal massimo rapporto fra tensione di Hall e potenza dissipata, su quali materiali vi orientereste?

II) -- Un elettrone si muove entro una buca di potenziale tridimensionale (3D), macroscopica e infinitamente profonda. Calcolare la funzione G(E), densità degli stati per unità di energia. Ripetere il calcolo di G(E) nel caso in cui una dimensione venga ridotta fino a determinare un confinamento quantistico non trascurabile (sistema quasi 2D). Confrontare i due risultati.

-- Come si potrebbe realizzare in pratica questa seconda situazione?

-- Provate ad immaginare una applicazione utile di un sistema quasi 2D suggerita dal confronto precedente.

III) Un fascio di elettroni incide su un solido:

a) Quali tecniche di analisi spettroscopiche sono basate sulla rivelazione degli elettroni emessi?

b) Quali sulla rivelazione dei fotoni?

c) Si descriva sinteticamente (massimo una pagina) una di queste tecniche precisando in particolare il principio su cui si basa, l'apparato sperimentale, i limiti ed i vantaggi, la complementarietà con altre tecniche.

Sorteggiato

I) -- Per i neutroni termici emergenti da un reattore nucleare si assuma la distribuzione energetica tipica di un gas classico a 300 K. Un fascio di neutroni parzialmente collimato viene diffratto da un cristallo perfetto.

a - Si vuole ottenere il massimo dell'intensità diffratta da un set di piani reticolari di distanza interplanare pari a 0.2 nanometri : come devono essere orientati questi piani rispetto alla direzione media del fascio incidente?

b - Esprimere l'incertezza $\Delta E/E$ sull'energia dei neutroni diffratti in funzione della divergenza angolare $\Delta\vartheta$ (sul piano di scattering) del fascio incidente.

c - Il fascio diffratto viene usato in un esperimento di scattering anelastico da onde ultrasonore in un mezzo in cui la loro velocità di propagazione è di 1482 m/sec. Se la divergenza angolare $\Delta\vartheta$ è pari a 0.5 gradi, stimare la massima lunghezza d'onda degli ultrasuoni in corrispondenza della quale è ancora possibile l'esperimento.

II) -- Il tempo di rilassamento $\tau(E)$ per lo scattering di un elettrone da parte di impurezze cariche in un semiconduttore dipende dall'energia E dell'elettrone con legge approssimata del tipo $\tau(E) = A\,E^{3/2}$ (A = costante). Per un gas di elettroni il valor medio di τ di può essere espresso dalla relazione

$$\langle\tau\rangle = \frac{2}{3}\,\frac{\int_0^\infty \tau(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f_0(E)}{\partial E}\right)E^{3/2}\,dE}{\int_0^\infty f_0(\varepsilon)\,E^{1/2}\,dE}$$

dove $f_0(E)$ è la probabilità di occupazione all'equilibrio.

a - Mostrare che $\langle\tau\rangle$ è proporzionale a $T^{3/2}$ per un gas classico, mentre è quasi indipendente dalla temperatura T per un gas fortemente degenere. Commentare la ragione fisica del risultato.

b - Discutere un tipo di misura e le condizioni sperimentali adatte ad evidenziare i due diversi comportamenti.

III) Un fascio di fotoni incide su un solido:

a) Quali tecniche di analisi spettroscopiche sono basate sulla rivelazione degli elettroni emessi?

b) Quali sulla rivelazione dei fotoni?

c) Si descriva sinteticamente (massimo una pagina) una di queste tecniche precisando in particolare il principio su cui si basa, l'apparato sperimentale, i limiti ed i vantaggi, la complementarietà con altre tecniche.